45. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – Első nap

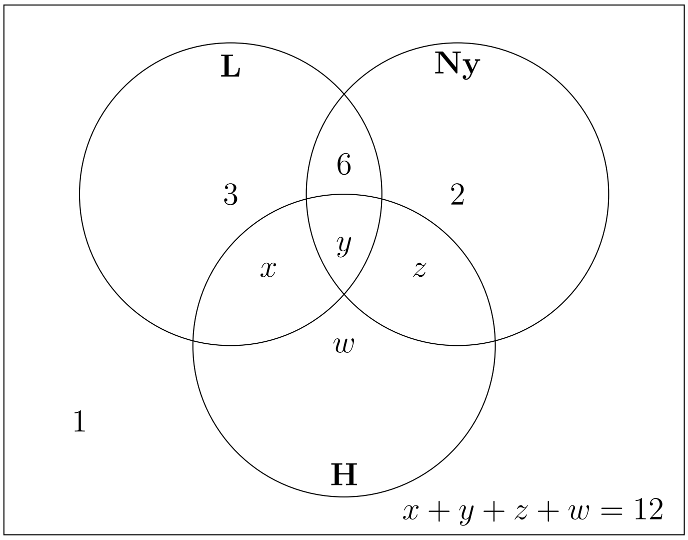
ÖTÖDIK OSZTÁLY

1. Az összes 3-jegyű számot felírtuk egy-egy kártyára, és ezeket mind beledobtuk egy zsákba. Hányat kell kihúznunk a zsákból bekötött szemmel, hogy a kihúzottak között biztosan legyen kettő olyan, melyekben a jegyek összege megegyezik?

   Megoldás
   Egy háromjegyű szám számjegyeinek összege legalább 1 (100), 0-val nem kezdődhet, ezért legalább egy darab 1-est kell tartalmaznia, és legfeljebb 27 (999), mert a 9-es a legnagyobb számjegy, és ebből legfeljebb három darab lehet. 1 és 27 között minden szám létrejöhet számjegyösszegként. Például 100-tól indulva mindig csak egy számegyet növelünk eggyel, és amelyik már elérte a 9-et, azt már nem változtatjuk. Így minden lépésben eggyel nő a számjegyösszeg, és elérjük a 999-et. (Az is elfogadható, ha a versenyző minden összegre mutat példát.) 27-féle összeg van, tehát legfeljebb 27 számot húzhatunk. Ha 28-at húzunk, biztosan lesz két egyforma számjegyösszeg. Tehát 28 számot kell húznunk.

2. Egy kártyapakli lapjain 4 féle figura lehet: egy kutya, egy kutyaház, egy labda és a kutyán nyakörv. Mindegyik lapon van kutya, viszont a többi figura vagy van, vagy nincs a lapokon. Nyakörvből és labdából többféle is akad, míg kutya és kutyaház csak egyféle van. Egy-egy kártyán akár mind a 4 figura is ott lehet. A pakliban nincs két egyforma lap. Tudjuk még a következőket is:
   (1) Egy olyan lap van, amin csak kutyus található.
   (2) Olyan, amelyiken nincs kutyaház, és labda sincs, 3 db van.
   (3) Se kutyaház, se nyakörv nincs 4 lapon.
   (4) 12 lapon van kutyaház.
   (5) Nincs kutyaháza, de van nyakörve 8 kutyusnak.
   Hány lapos a kártyapakli?

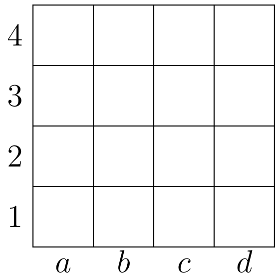
   1. megoldás
   Készítsünk halmazábrát, és írjuk bele az adatokat! (1) Ez az egy lap az ábrán kívülre kerül. (2) ,,olyan, melyen nincs ház és nincs labda, 3 van", de ezek között ott van az is, amelyiken csak kutya van, így a csak nyakörves mezőbe 2 kerül. (3) nincs ház és nincs nyakörv 4 lapon, de ezek között is ott van a csak kutyás lap, ezért a csak labdás mezőbe 3 lap kerül. (5) A nyolc házatlan nyakörves kutyus közül csak 2 nyakörves, a többi 6-nak labda jut, ez a 6 kerül az L és az NY közös részébe. (4) A 12 kutyaházas lap a H halmaz 4 mezőjében bárhogy lehet, de másutt nem, ezért a beírt számok összege a lapok száma: 1+2+3+6+12=24.



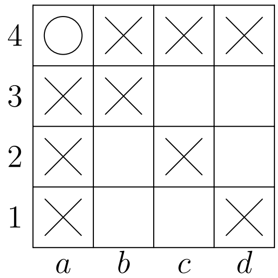
2. megoldás
Hasonló az előzőhöz, csak ábra nélkül. A feltétel szerint biztosan van olyan lap, amin csak egy kutya látható. Az összes többi lapon legalább 2 figura van, amiből az egyik kutya. 3 lapon nincs se kutyaház, se labda. Ebből az egyik az, amelyiken csak kutya van. Tehát van még 2 lap, amelyen 1-1 nyakörves kutya látható. Ez eddig összesen 3 lap. Mivel 4 lapon se kutyaház, se nyakörv nincs, így a csak kutyát tartalmazó lapon kívül kell lennie 3 lapnak, amelyen 1-1 kutya látható labdával. Ez az előzőekkel együtt eddig 6 lap. Az eddigi lapok egyikén sem volt kutyaház, így a (4) feltétel alapján van még 12 lap, melyeken szerepel kutyaház. Ahhoz, hogy a lapok különbözőek legyenek, ezek közül legalább 11-en labdának vagy nyakörvnek kell lennie. Ez eddig összesen 18 lap. Az (5) feltétel szerint 8 olyan kutyus van, amelyiknek nincs kutyaháza. Mivel ilyen eddig 2 volt, még kell lennie 6-nak. Összesen tehát 24 lapos a pakli.

3. megoldás
A kártyáknak három tulajdonsága van, kutyaház, nyakörv, labda.
A kutyaház „értéke” 0 vagy 1 aszerint, hogy van a lapon kutyaház, vagy nincs. A nyakörv értéke 0,1 vagy 2, hiszen a (2) feltétel alapján nyakörv alapján a kártyák háromfélék lehetnek. A labda értéke 0, 1, 2 vagy 3, hiszen a (3) feltétel alapján labda alapján a kártyák négyfélék lehetnek. Ha van kutyaház, akkor nyakörvből és labdából a lehetséges $3 \cdot 4 = 12$ variációból mindegyiknek elő kell fordulnia a (4) feltétel alapján. (5) alapján ha nincs kutyaház de van nyakörv, akkor nyakörvből és labdából a lehetséges $2 \cdot 4 = 8$ variációból mindegyiknek elő kell fordulnia. Ha nincs kutyaház és nincs nyakörv, akkor ladbából mind a 4 lehetőségnek elő kell fordulnia. Ezek szerint a lehetséges $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ variáció mindegyikének elő kell fordulnia, több lehetőség pedig nincs, mert minden kártya különböző.

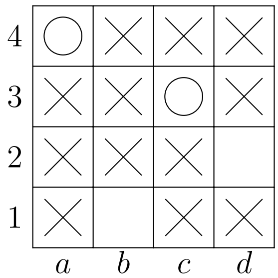
3. Egy 4×4-es táblán helyezz el 4 korongot úgy, hogy a sorok, oszlopok, valamint a négyzet két átlójának egyikében se legyen egynél több korong! Hány különböző megoldás van, ha a forgatással egymásra vihetőket egyformának tekintjük?

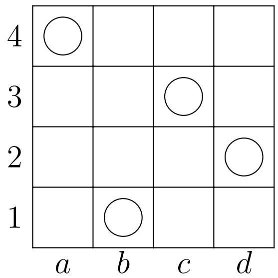


Megoldás
1. eset: valamelyik sarokban szerepel korong. Forgassuk el a táblát úgy, hogy ez az $a4$ sarok legyen. Az ábrán X jelöli azokat a mezőket, ahová már nem tehetünk korongot. Most a 3-as sorban még két lehetőség van, a $c3$ és a $d3$ mező.

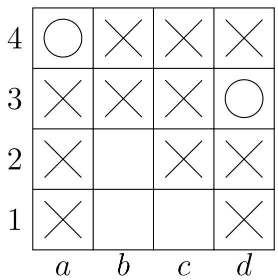


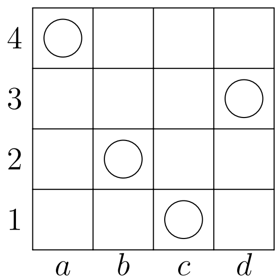
Válasszuk a $c3$ mezőt, és tegyünk X-eket $c3$ sorába, oszlopába és átlójába! Már csak két szabad mezőnk maradt, $d2$ és $b1$, ezek jók is. Az 1. jó megoldás tehát $a4$, $c3$, $b1$, $d2$.



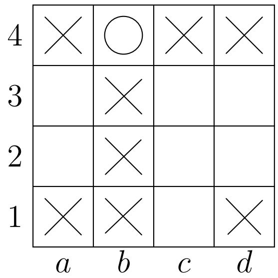


Most válasszuk a $d3$ mezőt, és tegyünk X-eket $d3$ sorába és oszlopába. Ezután $b1$-re nem tehetünk korongot, mert a negyedik korongot nem tudnánk elhelyezni, ezért csak $b2$-re és $c1$-re kerülhet a további két korong. A 2. jó megoldás tehát $a4$, $b2$, $c1$, $d3$.

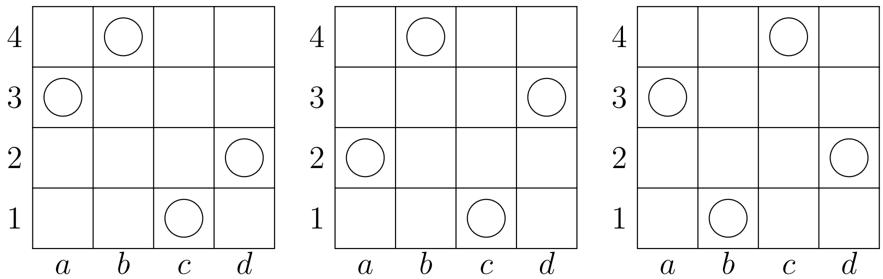




2. eset: egyik sarokban sem szerepel korong. Ekkor a 4-es sorban a $b4$ és a $c4$ mezők egyikébe tehetünk korongot (vegyük észre, hogy ezek a mezők nem forgathatók egymásba). Válasszuk először $b4$-et.



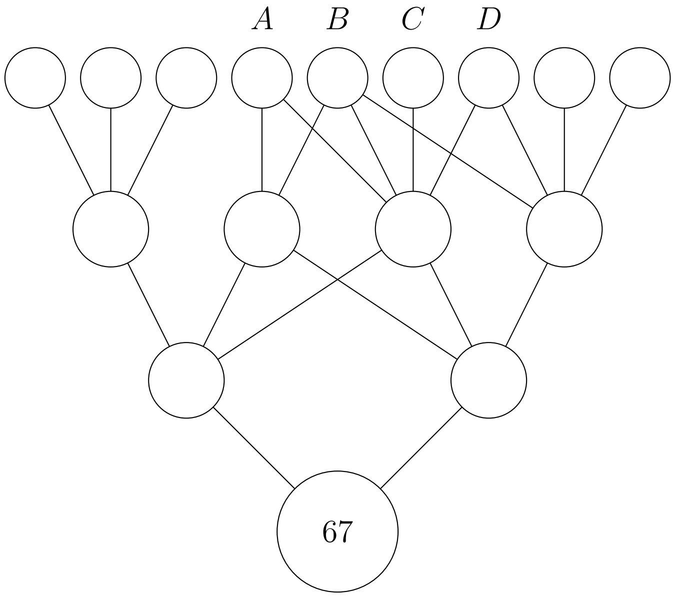
Ekkor az a oszlopban két lehetőségünk van: $a3$ és $a2$. Ha $a3$-at választjuk, csak a $c1$ és a $d2$ mezők maradnak választhatók, ha pedig $a2$-t, akkor a $c1$ és a $d3$ mezőket választhatjuk. (Ne feledjük, a sarokmezőket már nem választhatjuk.) Így kapjuk a 3. és a 4. jó megoldást.
Ha $c4$-et választjuk, teljesen hasonló módon kapunk még két megoldást, viszont abból az egyik 90 fokos forgatással fedésbe hozható az előző $a3$, $b4$, $c1$, $d2$ megoldással. A feladatnak tehát 5 jó megoldása van.



4. Egy matekverseny második fordulójába 340 gyerek jutott be. A fiúk számának 2/3 része egyenlő a lányok számának 3/4 részével. Hány lány jutott a második fordulóba?

1. megoldás
A fiúk számának 2/3 része egyenlő a lányok számának 3/4 részével, legyen ez a szám N.
A fiúk száma N 3/2 része. A lányok száma N 4/3 része. Az összlétszám a fiúk és a lányok számának összege. 3/2+4/3=17/6, tehát 340 egyenlő az N 17/6 részével. Így N egyenlő a 340 6/17 részével, azaz $N = (340 : 17) \cdot 6 = 120$. A lányok száma N 4/3 része, azaz a lányok száma $(120 : 3) \cdot 4 = 160$.
2. megoldás
Közös nevezőre hozva
a fiúk számának 8/12 része egyenlő a lányok számának 9/12 részével. Tehát a fiúk vannak többen, és a fiú-lány arány 9:8. A 340-et ilyen arányban kell felbontani. 9+8=17, 340:17=20, (tehát a fiúk száma $9 \cdot 20 = 180$,) a lányok száma $8 \cdot 20 = 160$.

5. Helyezd el az 1, 2, 3 ... 9 számokat a legfelső sorban lévő körökbe. Minden további körbe az a szám kerül, amelyik a fölötte szereplők összege, de csak azoké, amelyekkel vonal köti össze. A legalsó összeg 67.
a) Töltsd ki az ábrát!
b) Hány megoldás lehetséges az A, B, C, D körök kitöltésére?



A felső sor számai annyiszor adódnak az összeghez, ahány féle módon leérkezhetnek a vonalak mentén. A felső sorba írt számok közül azok, melyeket nem jelöl betű, csak egyszeresen jelennek meg a 67-ben összeadandóként.
A-ból 4, B-ből 5, C-ből 2, D-ből 3 féle módon lehet lejutni a 67-hez.
1+2+3+4+5+6+7+8+9=45, 67-45=22, a többlet pedig $22 = 3A + 4B + C + 2D$. Ha ezt az egyenlőséget teljesíti az (A, B, C, D) számnégyes, a többi szám tetszőlegesen választható (a maradék számok közül).
Ha $B = 3$, a legkisebb lehetséges összeg $3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 4 + 2 \cdot 2 = 23$, ami már túl sok. Tehát $B = 1$ vagy $B = 2$. Ha $B = 2$, akkor $3A + C + 2D = 14$. Itt a megoldások: $A = 1$, $C = 3$, $D = 4$ és $A = 1$, $C = 5$, $D = 3$. Ha pedig $B = 1$, akkor $3A + C + 2D = 18$, ahonnan $A = 2$, $C = 6$, $D = 3$ és $A = 3$, $C = 5$, $D = 2$ adódik. Tehát az (A, B, C, D) számnégyesre négy lehetőség adódik: $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 2, 5, 3)$, $(2, 1, 6, 3)$ és $(3, 1, 5, 2)$.

45. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – Második nap

ÖTÖDIK OSZTÁLY

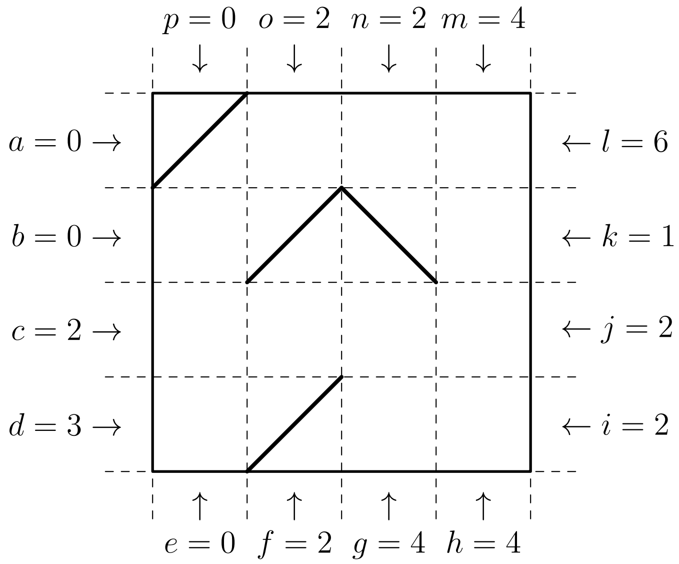
1. Választottam 3 különböző pozitív számjegyet, leírtam az összes olyan 3-jegyű számot, ami ebből a 3 számjegyből készíthető, majd összeadtam a leírt 3-jegyűeket. Az összeg 1776. Mi lehetett a 3 számjegy?

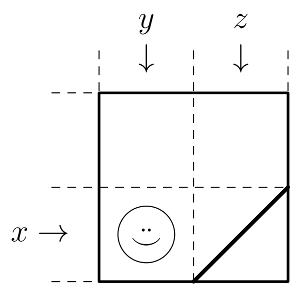
   1. megoldás
   Ha darab számot adtunk össze, mert hatféle sorrendje van a 3 különböző számjegynek. Mindegyik számjegy mindegyik helyiértéken pontosan kétszer szerepel, így mindhárom helyiértéken a számjegyek összegének kétszerese áll. A helyiértékek összege 10+10+1=111, így ha a számjegyek összege A, akkor $2 \cdot A \cdot 111 = 1776$. Innen a számjegyek összege, $A = 1776 : 222 = 8$, tehát a számjegyek 1, 2 és 5, vagy 1, 3 és 4.

   2. megoldás
   Próbálkozzunk! 123+132+213+231+312+321=1332, ez kevés. 124+142+214+241+412+421=1554, ez is kevés. 125+152+215+251+512+521=1776, ez jó. Mindegyik számjegy mindegyik helyiértéken pontosan kétszer szerepel, így az összeg csak a számjegyek összegétől függ. Tehát mindegyik megoldásban ugyanannyi a számjegyek összege. Mivel a talált megoldásban 1+2+5=8, így a számjegyek összege 8. 8=1+3+4, és más megoldás nincs.

   3. megoldás
   Megegyezik az elsővel, csak a számjegyek el vannak nevezve a, b, c-nek, így A helyett $a + b + c$ szerepel benne.

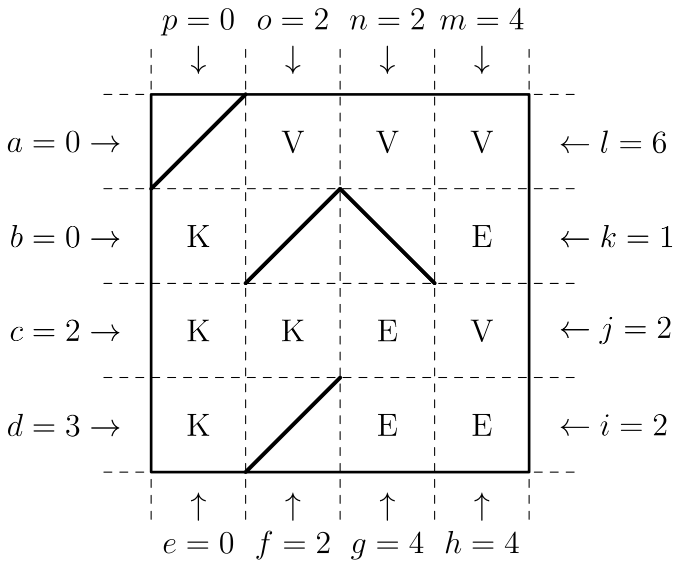
2. Peti egy Kísértet tanya nevű feladványt talált egy rejtvényújságban: egy 4×4-es táblázat egyes mezőiben átlósan elhelyezett tükrök vannak. Ezek mindkét oldalukon tükröződnek. A táblázat szabadon maradt mezőibe egy-egy lakót kell beköltöztetni úgy, hogy ha a táblázat valamelyik sorába, vagy oszlopába betekintünk, akkor épp annyi lakót lássunk, amennyit az odaírt szám jelöl. A nehézséget a lakók jelentik: 4 ember – ők láthatók, és tükörképük is látható, azaz tükröződnek; 4 kísértet – ők nem láthatók, viszont tükröződnek, 4 vámpír – ők láthatók, de nem tükröződnek. Petinek sikerült megoldani feladatot. Neked sikerül?





(Ha a jobb oldali rajzon látható mosolygós arc egy ember, akkor az x, y és z irányokból is látszik. Ha kísértet, akkor csak a z irányból, ha vámpír, akkor viszont csak x és y irányból látszik.)

Megoldás

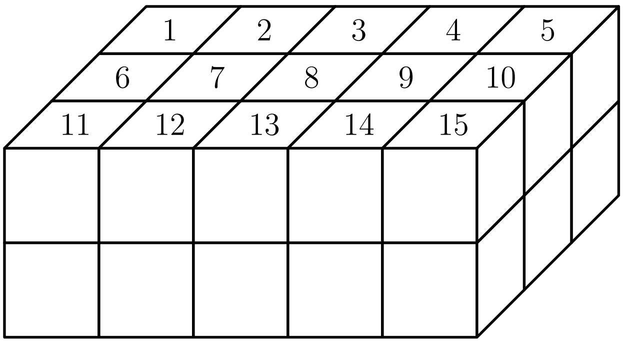


$l = 6$ és $e = 0$ miatt a felső sorban lakók láthatók, és nem tükröződnek, tehát vámpírok (ez 3 vámpír). A bal szélső oszlopban lakók nem láthatók, de tükröződnek, tehát kísértetek (ez 3 kísértet) . $n = 2$ és $k = 1$ miatt b (és k) sorának jobb szélső mezőjében látható és tükröződő lény lakik, tehát ember. $f = 2$ és $i = 2$ miatt d (és i) utolsó két mezőjében látható és tükröződő lények laknak, tehát emberek. $d = 3$ és $g = 4$ a c (és j) sorának középső két lakójáról ad információt. Mindkettő tükröződik, hiszen a bal alsó sarok kísértete nem számít bele a $d = 3$-ba, azaz egyik sem vámpír. Mivel $g = 4$ miatt a két lakóból a jobb oldali látható, így ő ember, a másik pedig kísértet. A kimaradó helyen vámpírnak kell lennie, ami kielégíti a feladat feltételeit.

3. Felírtuk egy táblára a pozitív egész számokat 1-től 2016-ig. Egy lépésben valamelyik kettőt letöröljük, és **mindkettő helyett** felírjuk a különbségüket. Ezt a lépés ismételgetjük. Elérhető-e, hogy valamelyik lépés után mindegyik szám
a) 3
b) 17 legyen?

Megoldás
Minden egész szám elérhető 1-től 2015-ig.
Legyen a cél az N szám. Az 1, $N+1$ számok helyett írjuk fel az N, N párt. A többi 2014 számot rendezzük párokba, és írjuk fel helyettük a különbségüket: így kapunk 1007 darab párt, melyek egyforma számokból állnak. Ezután az összes ilyen párból csináljunk 0, 0 párt. Van tehát 2014 darab nullánk, és két N-ünk. Most a nullákat az egyik N-nel párosítva 2014 lépésben elérhetjük, hogy mindegyik szám N legyen.

4. Építettünk egy téglatestet egységkockákból, melyben az egy csúcsba futó élek hossza 2, 3, 5 egység. Egyesével elvesszük a kockákat úgy, hogy minden lépésben a kapott test felszíne változatlan maradjon. (Az elvétel során ügyelj arra, hogy a test ,,egyben” maradjon, azaz ha a teljes lappal egymáshoz csatlakozó kockákat összeragasztanánk, az építményt egy kockánál fogva fel lehessen emelni.)
a) Vegyél el minél több egységkockát!
b) Mennyi az elvehető egységkockák maximális száma?
(A kockákat a leírás megkönnyítése érdekében megszámoztuk az ábra szerint. Az alsó réteg kockáinak sorszáma mindig 15-tel nagyobb, mint a felette lévő kockáé.)



Megoldás
Az eljárás lényege, hogy minden lépésben olyan kiskockát vegyünk el, melynek 3 lapja látszik, mert így 3 lapja van takarásban, és elvételekor a 3 látható lapja eltűnik, cserébe a három takarásban lévő lap megjelenik (azok, amelyekhez ennek a kockának a nem látható lapjai csatlakoztak).
Az eredeti felszín $2 \cdot (2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5) = 62$.
Legkevesebb hány kocka maradhatott?
Legkevesebb kockát akkor használunk, ha a legkevesebb lap mentén illesztünk. Mivel a testnek egyben kell maradnia, minden benne lévő kocka legalább egy lapja csatlakozó felület. Induljunk ki egy kockából. Ehhez ragasztva a következőt négy egységgel nő a felszín, mert a ragasztásnál elvesztünk két lapot. Ezt folytatva 14 lépésben érjük el a 62-t ((62-6):4=14). Tehát legalább 15 kockából kell állnia egy ilyen építménynek.
Ez el is érhető, például ezek elvételével: 1, 5, 11, 15, 2, 4, 12, 14, 7, 9, 8, 17, 19, 27, 19. Így 15 kockát vettünk el, és a test még egyben maradt.

45. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – Első nap

HATODIK OSZTÁLY

1. Hány olyan négyjegyű szám van, amelynek utolsó számjegye nagyobb, mint az első számjegye?

Megoldás
Az első számjegy nem lehet 0, és mivel az utolsó nagyobb nála, az sem lehet 0. Első és utolsó számjegynek tehát két különbözőt kell választanunk az 1, ..., 9 számjegyek közül. Ha az első számjegy 1-es, akkor az utolsó 8-féle lehet, ha az első számjegy 2-es, akkor az utolsó 7-féle, stb. Így ez összesen $8 + 7 + \ldots + 1 = 36$ lehetőség.
(Másképp: Az egyik számot 9, a másikat 8 lehetőség közül választhatjuk, de így minden párt kétszer számolunk, tehát $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ lehetőség van.) A középső két számjegyet tetszőlegesen választhatjuk, tehát mindkettő 10-féle lehet. Így összesen $36 \cdot 10 \cdot 10 = 3600$ darab négyjegyű szám rendelkezik a megadott tulajdonsággal.

2. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek mindegyikét pontosan egyszer felhasználva felírtunk öt pozitív egész számot. Hány négyzetszám lehet ezek között? Adj minden lehetőségre példát! (Négyzetszámnak nevezzük azokat az egész számokat, amelyek megkaphatók egy egész szám önmagával vett szorzataként.)

Megoldás
Lehetséges, hogy nincs közöttük négyzetszám, pl.: **12, 34, 5, 67, 89**. Lehetséges, hogy 1 négyzetszám van közöttük, pl.: **1** $(= 1^2)$**, 23, 45, 67, 89**. Lehetséges, hogy 2 négyzetszám van közöttük, pl.: **1** $(= 1^2)$**, 4** $(= 2^2)$**, 23, 56, 789**. Lehetséges, hogy 3 négyzetszám van közöttük, pl.: **1** $(= 1^2)$**, 4** $(= 2^2)$**, 9** $(= 3^2)$**, 23, 5678**. Lehetséges, hogy 4 négyzetszám van közöttük, pl.: **1** $(= 1^2)$**, 4** $(= 2^2)$**, 9** $(= 3^2)$**, 25** $(= 5^2)$**, 3678**. Lehetséges, hogy mind az 5 négyzetszám, pl.: **1** $(= 1^2)$**, 9** $(= 3^2)$**, 25** $(= 5^2)$**, 36** $(= 6^2)$**, 784** $(= 28^2)$.

Megjegyzés
A 0, ..., 4 négyzetszámot tartalmazó esetek mindegyikére sok lehetőség van, de megmutatható, hogy mind az 5 szám csak a fenti módon lehet négyzetszám.

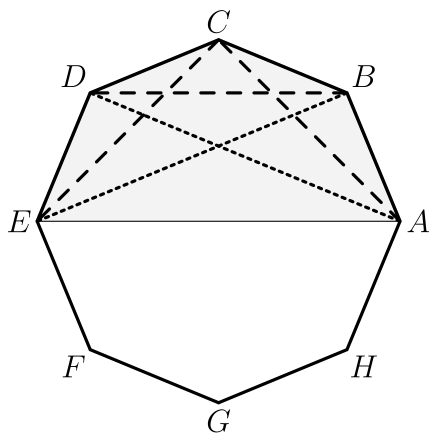
3. Egy dominókészlet köveinek egyik oldala egy vonallal két részre van osztva. Az egyes részek mindegyikén 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6 pötty lehet. A készlet a lehető legtöbb dominót tartalmazza úgy, hogy nincs közöttük két egyforma. (Két dominó egyforma, ha egymás alá helyezhetők úgy, hogy a választóvonalak egy egyenesbe esnek és az egymás alatti részek azonos számú pöttyöt tartalmaznak.)
a) Hány dominóból áll a készlet?
b) Mutasd meg, hogy nem lehet az összes dominót egymás mellé helyezni egy sorba úgy, hogy a szomszédos dominók érintkező részein azonos számú pötty legyen!

Megoldás
Olyan dominóból, melynek mindkét térfelén azonos számú pötty található, 6-féle van. Ha a dominó két részén különböző a pöttyök száma, akkor az egyik térfélen 6, a másikon 5-féle érték lehet, de az $(a; b)$ és a $(b; a)$ dominók egyformák, így $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ ilyen dominó van. Tehát összesen $6 + 15 = 21$

dominóból áll a készlet. (Az összes lehetőség felsorolásával kapott helyes értékért is járnak a fenti pontok.)
Ha kirakható lenne a feltételeknek megfelelő dominósor, akkor a dominók találkozásánál mindig egyforma számú pötty lenne egymás mellett. Emiatt a sorban minden pöttyszám mindig kétszer egymás után szerepelne, kivéve a sor legszélén lévő térfelek pöttyszámait. Tehát azoknak a pöttyszámoknak, amelyek nem szerepelnek a sor valamelyik szélén, összesen páros alkalommal kell szerepelniük. Azonban minden pöttyszám összesen páratlan számú térfélen szerepel a készletben: kétszer az $(a;a)$ típusú dominón, és ötször a másik öt értékkel párosítva. Így a feltételeknek megfelelő sor nem tartalmazhatja az összes dominót.

4. Peti rajzolt egy ötszöget. Ezután meghatározta az oldalak és az átlók hosszát. Lehetséges-e, hogy ezekre pontosan négy különböző értéket kapott úgy, hogy az egyik érték egyszer, a másik kétszer, a harmadik háromszor, a negyedik négyszer fordult elő?

1. megoldás
Legyen $ABCDEFGH$ egy szabályos nyolcszög, ekkor az $ABCDE$ ötszög megfelelő. A szabályos nyolcszögben a szimmetriák miatt minden oldal, minden másodszomszédos csúcsot összekötő átló, minden harmadszomszédos csúcsot összekötő átló, valamint minden negyedszomszédos (átellenes) csúcsot összekötő átló is egyenlő hosszúságú. A fenti távolságok ráadásul egymástól mind különbözőek.

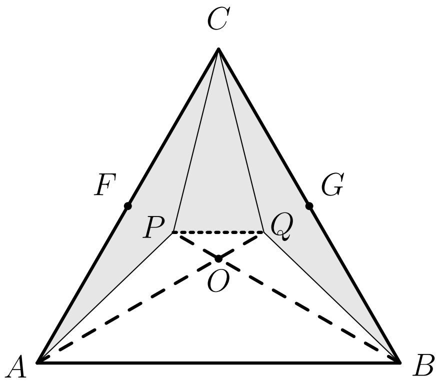


Így $AB = BC = CD = DE < AC = BD = CE < AD = BE < AE$, tehát az $ABCDE$ ötszög valóban teljesíti a feltételeket.

Megjegyzés
Szabályos nyolcszög helyett bármely n oldalú szabályos sokszög 5 szomszédos csúcsa megfelelő ötszöget alkot, ha $n \geq 8$ (kisebb oldalszám esetén nem lesz 4 különböző hosszúság).

Ugyancsak megfelel a fenti nyolcszögben az $ACDFG$ ötszög, vagy a nyolcszög köré írható kör O középpontjával az $ABCDO$ ötszög.

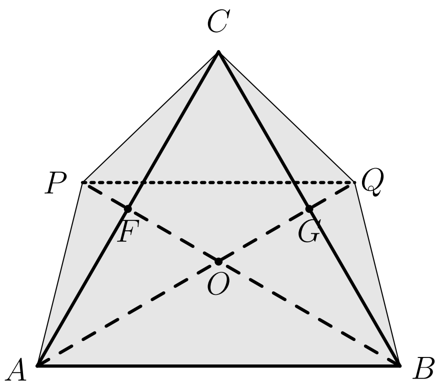
2. megoldás
Legyen ABC egy szabályos háromszög, az AC és BC oldalak felezőpontjai F és G, a felezőmerőlegesek metszéspontja O. Legyen továbbá P az FO, Q pedig a GO szakasz felezőpontja. Ekkor az $APQBC$ ötszög megfelel a feltételeknek.



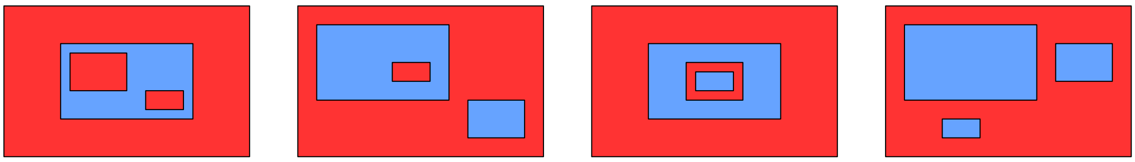
$AB = BC = CA$, mivel ezek a szabályos háromszög oldalai. Mivel P rajta van az AC oldal felezőmerőlegesén, ezért $AP = PC$, de a szimmetria miatt ezek BQ-val és QC-vel is egyenlők, ez 4 egyenlő szakasz. Ugyancsak a szimmetria miatt $AQ = BP$. Látható, hogy nincs több egyenlőség a szakaszok között ($PQ < AP = PC = BQ = QC < AQ = BP < AB = BC = AC$), ezért az $APQBC$ ötszög valóban teljesíti a feltételeket.

Megjegyzés

A felezőmerőlegeseken máshol is felvehetnénk (szimmetrikusan) a P és Q pontokat, az egyenlőségek akkor is fennállnak. Arra kell ügyelni, hogy létrejöjjön 4 különböző távolság, illetve megrajzolható legyen az ötszög.



5. Négy különböző méretű, téglalap alakú szőnyegünk van. A szőnyegek egyik oldala piros, a másik kék. Egymásra helyeztük a szőnyegeket négy különböző elrendezésben (ld. ábra). Az első három esetben meghatároztuk, hogy mekkora piros területet látunk. Határozd meg a látható piros terület nagyságát a negyedik elrendezésnél!



$314\ \text{dm}^2$ | $196\ \text{dm}^2$ | $262\ \text{dm}^2$ | ?

1. megoldás
Induljunk ki az első ábrán látható elrendezésből, és fordítsuk meg a legkisebb szőnyeget úgy, hogy a kék oldalát lássuk. Ekkor a piros terület a legkisebb szőnyeg területével csökkent. Húzzuk ezt a szőnyeget a második legkisebb szőnyeg tetejére. Ekkor ismét a legkisebb szőnyeg területével csökken a piros terület, és pontosan ugyanannyi lesz, mint a harmadik ábrán. A változás, azaz a legkisebb szőnyeg területének kétszerese tehát $314\ \mathrm{dm}^2 - 262\ \mathrm{dm}^2 = 52\ \mathrm{dm}^2$. Induljunk ki most a második ábra elrendezéséből, fordítsuk meg a legkisebb szőnyeget a kék felére, és húzzuk olyan helyre, ahol a legnagyobb szőnyeg felett van, de nem érintkezik a második legnagyobb szőnyeggel. Ekkor ismét a legkisebb szőnyeg területének kétszeresével, azaz $52\ \mathrm{dm}^2$-rel csökkent a piros terület. Így azonban éppen olyan elrendezést kaptunk, mint amilyen a negyedik ábrán látható. Tehát a negyedik ábrán $52\ \mathrm{dm}^2$-rel kevesebb piros terület látszik, mint a másodikon. Azaz a negyedik ábrán a látható piros terület $196\ \mathrm{dm}^2 - 52\ \mathrm{dm}^2 = 144\ \mathrm{dm}^2$.

2. megoldás
Jelölje a szőnyegek területét $A > B > C > D$.
Ekkor az első ábrán látható piros terület: $A-B+C+D = 314\ \mathrm{dm}^2$. A második ábrán látható piros terüle:t $A-B-C+D = 196\ \mathrm{dm}^2$. Ez az előzőnél $2C$-vel kevesebb, tehát $2C = 314-196 = 118\ \mathrm{dm}^2$. A harmadik ábrán látható piros terület: $A-B+C-D = 262\ \mathrm{dm}^2$. A negyedik ábrán látható piros terület $A-B-C-D$. Ez az előzőnél éppen $2C = 118\ \mathrm{dm}^2$-rel kevesebb, azaz $262\ \mathrm{dm}^2 - 118\ \mathrm{dm}^2 = 144\ \mathrm{dm}^2$.

3. megoldás
Jelölje a szőnyegek területét $A > B > C > D$.
Ekkor az első ábrán látható piros terület: $A-B+C+D = 314\ \mathrm{dm}^2$. A második ábrán látható piros terület: $A-B-C+D = 196\ \mathrm{dm}^2$. A harmadik ábrán látható piros terület: $A-B+C-D = 262\ \mathrm{dm}^2$.
A negyedik ábrán látható piros terület:
$A-B-C-D = (A-B-C+D)+(A-B+C-D)-(A-B+C+D) = = 196\ \mathrm{dm}^2 + 262\ \mathrm{dm}^2 - 314\ \mathrm{dm}^2 = 144\ \mathrm{dm}^2$.

45. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – Második nap

HATODIK OSZTÁLY

1. Egy négyjegyű szám minden számjegye különböző. Azt is tudjuk, hogy ha az első számjegyet elhagyjuk, akkor egy 9-cel osztható, ha a másodikat, akkor egy 2-vel osztható, ha a harmadikat, akkor egy 5-tel osztható, ha a negyediket, akkor egy 4-gyel osztható háromjegyű számot kapunk. Hány ilyen négyjegyű szám van?

   Megoldás
   Az utolsó számjegy páros, hiszen, ha a második számjegyet elhagyjuk, akkor páros számot kapunk. Másrészt 5-tel is osztható az utolsó számjegy, hiszen a harmadik számjegyet elhagyva 5-tel osztható számot kapunk. Vagyis az utolsó számjegy 0. Mivel az első számjegyet elhagyva 9-cel osztható számot kapunk, ezért az utolsó három számjegy összege 9-cel osztható. Mivel az utolsó 0, ezért a középső két számjegy összege osztható 9-cel. Az utolsó számjegyet elhagyva 4-gyel osztható számot kapunk, vagyis a középső két számjegyet tekintve egy 4-gyel osztható számot kapunk. Ez a kétjegyű szám a korábbiak miatt 9-cel is osztható, így csak 36 és 72 lehet. Vagyis a szám $\overline{a360}$ vagy $\overline{b720}$ alakú. Az első számjegytől függetlenül most már minden feltétel teljesülni fog, tehát csak arra kell figyelnünk, hogy nem lehet két azonos számjegye a számnak. Vagyis a és b is 7-7 különböző értéket vehet fel. Tehát $2 \cdot 7 = 14$ megfelelő szám létezik.

2. Van 6 egyformán kinéző súlyunk, amelyek 1, 2, 3, 4, 5, 6 dekásak, és van 6 feliratunk ugyanezen értékekkel. Minden súlyra rákerült egy felirat, és tudjuk, hogy legalább 4 súlyra a helyes érték került. Hogyan lehet eldönteni egy kétkarú mérleg segítségével, két méréssel, hogy mind a 6 súlyra helyes felirat került-e?
   (Egy mérés a következőt jelenti: a két serpenyőbe tetszőlegesen súlyokat helyezünk, majd leolvassuk, hogy az egyik serpenyőbe kisebb, nagyobb vagy ugyanakkora tömeget helyeztünk-e, mint a másikba.)

   Megoldás
   Mivel legalább 4 súlyra a helyes érték került, ha nem mindegyik felirat helyes, akkor két súly felirata felcserélődött. Tegyük fel a mérleg bal serpenyőjébe az 1 és 6, a jobb serpenyőbe a 2 és 5 dekás címkét viselő súlyokat. Ha a mérleg bármelyik irányba elbillen, akkor nem lehet mindegyik felirat helyes, ekkor készen vagyunk. Ha a mérleg egyenlőséget mutat, akkor csak az 1–6, 2–5, 3–4 párok valamelyikén lehet megcserélt felirat. Tegyük fel ekkor a mérleg bal serpenyőjébe az 1 és 4, a jobb serpenyőbe a 2 és 3 dekás címkét viselő súlyokat. Ha a mérleg bármelyik irányba elbillen, akkor nem lehet mindegyik felirat helyes. Ha a mérleg egyenlőséget mutat, akkor viszont a fent megadott párok egyikén sem lehet megcserélt felirat, ekkor tehát mindegyik felirat helyes.

   Megjegyzés
   Minden olyan méréspár jó, ahol az alábbi feltételek teljesülnek: (1) Mindkét mérésnél a címkék szerint azonos össztömeg van a serpenyőkben. (2) Nincs két olyan súly, amely mindkét mérésnél azonos helyre (azonos serpenyőbe vagy a mérlegen kívülre) kerül.

   Ha valamelyik mérésnél nincs egyenlőség, akkor nem lehetnek jók a címkék. Ha fel lett cserélve két címke, akkor nem lesz egyenlőség annál a mérésnél, ahol ezek különböző helyen szerepelnek. Így pontosan akkor helyes minden felirat, ha mindkét mérésnél egyenlőséget kapunk.

Lehetséges azonban olyan méréspár is, ahol az egyik mérésnél nem egyenlőséget várunk. Például az 14–23 és 125–36 mérések esetén akkor és csak akkor helyesek a címkék, ha az első mérésnél egyenlőség van, a második mérésnél pedig a jobb serpenyő a nehezebb.

3. Felírtuk egy táblára a (pozitív egész) számokat 1-től 2016-ig. Egy lépésben valamelyik kettőt letöröltük, és **mindkettő helyett** felírtuk a két szám különbségeként kapható **nemnegatív** számot. Ezt a lépést néhányszor megismételtük, aminek következtében a táblán ugyanaz a szám szerepelt 2016-szor. Add meg ennek a számnak az összes lehetséges értékét!

Megoldás
Vegyük észre, hogy bármely két számot kicserélve a különbségükre, majd a különségeket is kicserélve a különbségükre, mindkét szám helyén 0-t kapunk. Így lehetséges, hogy az összes számot nullára cseréljük, azaz a 0 szerepeljen 2016-szor a táblán. Ugyanakkor elérhető a fenti módon az is, hogy egyetlen N szám kivételével az összeset 0-ra cseréljük. Ekkor N és 0 helyett felírhatunk N-et kétszer, ily módon az összes nullát N-re cserélhetjük. Tehát az $1, 2, \dots 2016$ számok közül bármelyiket megtartva, a többit nullára, majd a megtartott számra cserélhetjük. Így ezen számok bármelyike lehet 2016 példányban a táblán. 0 és 2016 közötti számok (nemnegatív) különbségeként csak 0 és 2016 közötti szám állhat elő. Ezért a 2016-szor szereplő szám összes lehetséges értéke: $0, 1, \dots, 2016$.

Megjegyzés
A 2016 bármely olyan d osztójára, amelyre $2016/d$ páros, lehetséges az $1, 2, \dots, 2016$ számokat d különbségű párokba osztani. Így ezen párok helyett a különbségüket felírva csupa d lesz a táblán.

4. Egy pozitív egész számot szépnek nevezünk, ha a 2, 3, 5, 7 számjegyek mindegyikét tartalmazza legalább egyszer, más számjegyet azonban nem. Egy szép számot csodaszépnek mondunk, ha a 7-szerese is szép szám.
a) Mutasd meg, hogy végtelen sok csodaszép szám van.
b) Mutasd meg, hogy egy csodaszép számban csak egy 7-es számjegy lehet.

Megoldás
Tekintsük a $753\dots325$ alakú számokat, ahol a $\dots$ helyén tetszőleges számú 3-as számjegy szerepel. Ezeknek a 7-szerese könnyen ellenőrizhetően $5273\dots275$ alakú, ahol a $\dots$ helyén 3-asok szerepelnek. Így a $753\dots325$ alakú számok mind csodaszépek, tehát végtelen sok csodaszép szám van. Szorozzunk egy csodaszép számot írásban 7-tel. A 2, 3, 5, 7 számjegyeket 7-tel szorozva mindig 10-nél nagyobb számot kapunk, így minden számjegy szorzásánál keletkezik átvitel. Mivel $7 \cdot 7 = 49$, ezért a 7-es nem lehet utolsó számjegy, viszont ekkor az érkező átvitel miatt már nem 4-et, hanem 5-öt kell átvinni a következő számjegyhez. Ugyanakkor $2 \cdot 7 + 5 = 19$, $3 \cdot 7 + 5 = 26$, $5 \cdot 7 + 5 = 40$, $7 \cdot 7 + 5 = 54$ mindegyike olyan jegyre végződik, ami szép számban nem szerepelhet. Így a 7-es számjegy előtt egy csodaszép számban nem lehet másik számjegy, tehát legfeljebb egy 7-es számjegy szerepelhet benne.

Megjegyzés
A feladat nem kérte, hogy az összes csodaszép számot megadjuk. Megmutatható azonban, hogy a csodaszép számok az alábbiak:

$$75\underbrace{3\dots3}_{a_1\text{ db}}\underbrace{2\dots2}_{b_1\text{ db}}5\underbrace{3\dots3}_{a_2\text{ db}}\underbrace{2\dots2}_{b_2\text{ db}}\ \dots\ 5\underbrace{3\dots3}_{a_k\text{ db}}\underbrace{2\dots2}_{b_k\text{ db}}5,$$

ahol az $a_1, \dots, a_k$ és $b_1, \dots, b_k$ darabszámok mindegyike legalább 1, és legalább egy a_i nagyobb 1-nél. Utóbbi feltétel azért szükséges, mert ha nincs két egymást követő 3-as számjegy, akkor a szám 7-szeresében nem lesz 3-as számjegy.

45. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – Első nap

HETEDIK OSZTÁLY

1. Sárkányországban minden sárkánynak legalább 3 feje van. Azok a sárkányok, amelyeknek páratlan sok fejük van, mindig igazat mondanak, amelyeknek páros sok, mindig hazudnak. Négy sárkány éppen bridzselt, amikor megkérdezték őket, hogy négyüknek összesen hány fejük van. A következő válaszok érkeztek: 14, 15, 16, 20. Hány feje van összesen az igazmondó sárkányoknak? Add meg az összes lehetőséget!

Megoldás

Elképzelhető, hogy egyetlen igazmondó sincs közöttük, és a fejeik száma 4 olyan páros szám, amelyeknek az összege se nem 14, se nem 16, se nem 20. Például lehet mindnek 8 feje. Ha van köztük igazmondó, akkor legfeljebb egy lehet, mert minden válasz különböző. Vagyis egy sárkány van, amelynek páratlan számú feje van és három, amelynek páros. A fejeik számának összege tehát páratlan. Vagyis összesen 15 fejük van. A hazug sárkányoknak legalább 4, az igazmondóknak legalább 3 feje van, így három hazug és egy igazmondó sárkánynak legalább 15 $(3+4+4+4)$ feje van. Tehát csak az képzelhető el, hogy a hazug sárkányoknak pontosan 4, az egyetlen igazmondónak pontosan 3 feje van, vagyis a válasz **0 vagy 3**.

2. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek mindegyikét pontosan egyszer felhasználva felírtunk öt pozitív egész számot. Hány négyzetszám lehet ezek között? Adj minden lehetőségre példát!
(Négyzetszámnak nevezzük azokat az egész számokat, amelyek megkaphatók egy egész szám önmagával vett szorzataként.)

Megoldás

Lehetséges, hogy nincs közöttük négyzetszám, pl.: **12, 34, 5, 67, 89**. Lehetséges, hogy 1 négyzetszám van közöttük, pl.: **1** $(=1^2)$**, 23, 45, 67, 89**. Lehetséges, hogy 2 négyzetszám van közöttük, pl.: **1** $(=1^2)$**, 4** $(=2^2)$**, 23, 56, 789**. Lehetséges, hogy 3 négyzetszám van közöttük, pl.: **1** $(=1^2)$**, 4** $(=2^2)$**, 9** $(=3^2)$**, 23, 5678**. Lehetséges, hogy 4 négyzetszám van közöttük, pl.: **1** $(=1^2)$**, 4** $(=2^2)$**, 9** $(=3^2)$**, 25** $(=5^2)$**, 3678**. Lehetséges, hogy mind az 5 négyzetszám, pl.: **1** $(=1^2)$**, 9** $(=3^2)$**, 25** $(=5^2)$**, 36** $(=6^2)$**, 784** $(=28^2)$.

3. Az a, b, c, d pozitív valós számokról a következőket tudjuk:
(1) $a:(b:c:d)=72$
(2) $a:(b:c):d=8$
(3) $a:b:(c:d)=4{,}5$.
Mennyi lehet $a:b:c:d$ értéke?

Megoldás

Tudjuk, hogy $a:(b:c:d)=72$, amiből következik, hogy $\frac{acd}{b}=72$.
Mivel $a:(b:c):d=8$, ezért $\frac{ac}{bd}=8$.
Végül pedig tudjuk, hogy $a:b:(c:d)=4{,}5$, vagyis $\frac{ad}{bc}=4,5$. Az első két egyenletet elosztva egymással azt kapjuk, hogy $d^2=9$. Mivel a számok pozitívak, így $d=3$. Az első egyenletet a harmadikkal osztva azt kapjuk, hogy $c^2=16$, azaz $c=4$. Felhasználva ezt a két értéket és a

második egyenletet: $\frac{a}{b} = 6$. Ekkor viszont a keresett $a : b : c : d = 6 : 4 : 3 = \frac{1}{2}$. Ezek az arányok létre is jöhetnek, ha mondjuk $a = 6$, $b = 1$, $c = 4$ és $d = 3$.

4. Egy kör mentén elhelyeztünk néhány pozitív egész számot. Tudjuk, hogy bármely két szomszédos szám közül az egyik osztója a másiknak, ugyanakkor a nem szomszédos számpárok egyike sem áll osztó-többszörös viszonyban. Lehetséges-e, hogy a körön elhelyezett számok száma 20?

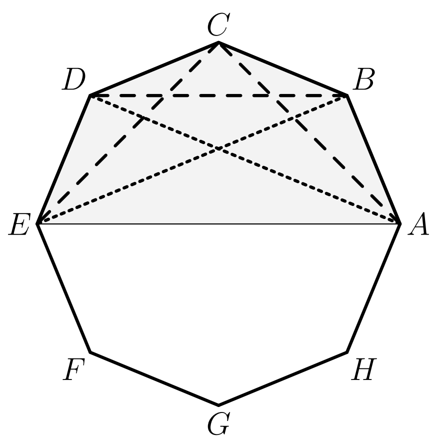
Megoldás

Legyen $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{10}$ tíz darab különböző prímszám. (Például $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$.) Legyenek a a kör mentén a számok sorban: $p_1, p_1p_2, p_2, p_2p_3, p_3, p_3p_4, p_4, \dots, p_9, p_9p_{10}, p_{10}, p_{10}p_1$. Ez az elhelyezés megfelel a feladat feltételeinek. A szomszédos számok közül az egyik két prímszám szorzata, mégpedig a két szomszédjának a szorzata. Ebből következik, hogy bármely két szomszédos szám osztó-többszörös viszonyban van, a prím osztója annak, ami két prím szorzata.
Ha két szám nem szomszédos, akkor nem lehetnek osztó-többszörös viszonyban.
Ugyanis három eset képzelhető el két nem szomszédos számra:
1) Két különböző prím. Ezek közül egyik sem oszthatja a másikat. 2) Egy prím (p_i) és egy másik, ami két prím szorzata (p_np_m). Mivel p_i csak a két szomszédjában szerepel prímtényezőként, és a két szám nem szomszédos, ezért p_n és p_m egyike sem p_i, ezért egyik sem osztója a másiknak. 3) Két szám, amik 2-2 prím szorzatai, p_ip_j és p_mp_n, ahol i, j, m, n között lehet kettő, amik egyenlők. Mivel legfeljebb az egyik prímtényezőjük közös, ezért mindkét számban szerepel olyan prímtényező, ami a másikban nem, így egyik szám sem lehet osztója a másiknak.

5. Peti rajzolt egy ötszöget. Ezután meghatározta az oldalak és az átlók hosszát. Lehetséges-e, hogy ezekre pontosan négy különböző értéket kapott úgy, hogy az egyik érték egyszer, a másik kétszer, a harmadik háromszor, a negyedik négyszer fordult elő?

1. megoldás

Legyen $ABCDEFGH$ egy szabályos nyolcszög, ekkor az $ABCDE$ ötszög megfelelő. A szabályos nyolcszögben a szimmetriák miatt minden oldal, minden másodszomszédos csúcsot összekötő átló, minden harmadszomszédos csúcsot összekötő átló, valamint minden negyedszomszédos (átellenes) csúcsot összekötő átló is egyenlő hosszúságú. A fenti távolságok ráadásul egymástól mind különbözőek.

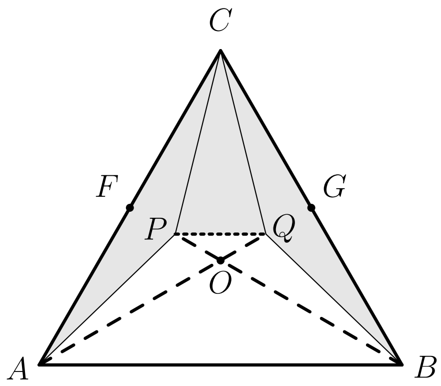


Így $AB = BC = CD = DE < AC = BD = CE < AD = BE < AE$, tehát az $ABCDE$ ötszög valóban teljesíti a feltételeket.

Megjegyzés
Szabályos nyolcszög helyett bármely n oldalú szabályos sokszög 5 szomszédos csúcsa megfelelő ötszöget alkot, ha $n \geq 8$ (kisebb oldalszám esetén nem lesz 4 különböző hosszúság).

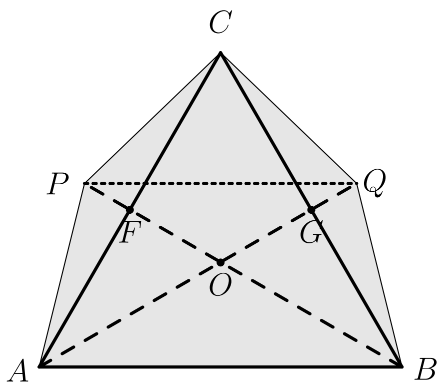
Ugyancsak megfelel a fenti nyolcszögben az $ACDFG$ ötszög, vagy a nyolcszög köré írható kör O középpontjával az $ABCDO$ ötszög.

2. megoldás
Legyen ABC egy szabályos háromszög, az AC és BC oldalak felezőpontjai F és G, a felezőmerőlegesek metszéspontja O. Legyen továbbá P az FO, Q pedig a GO szakasz felezőpontja. Ekkor az $APQBC$ ötszög megfelel a feltételeknek.



$AB = BC = CA$, mivel ezek a szabályos háromszög oldalai. Mivel P rajta van az AC oldal felezőmerőlegesén, ezért $AP = PC$, de a szimmetria miatt ezek BQ-val és QC-vel is egyenlők, ez 4 egyenlő szakasz. Ugyancsak a szimmetria miatt $AQ = BP$. Látható, hogy nincs több egyenlőség a szakaszok között ($PQ < AP = PC = BQ = QC < AQ = BP < AB = BC = AC$), ezért az $APQBC$ ötszög valóban teljesíti a feltételeket.

Megjegyzés
A felezőmerőlegeseken máshol is felvehetnénk (szimmetrikusan) a P és Q pontokat, az egyenlőségek akkor is fennállnak. Arra kell ügyelni, hogy létrejöjjön 4 különböző távolság, illetve megrajzolható legyen az ötszög.



45. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – Második nap

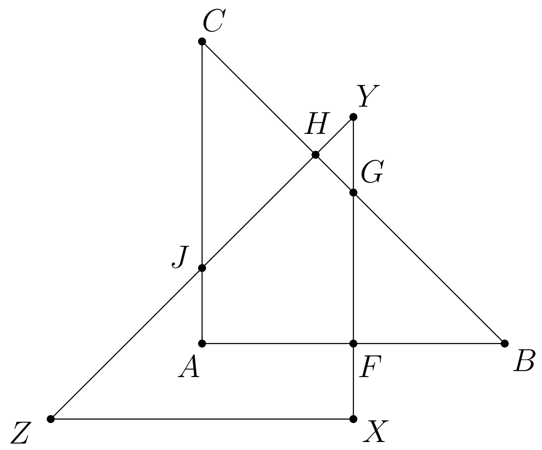
HETEDIK OSZTÁLY

1. Egy négyjegyű szám minden számjegye különböző. Azt is tudjuk, hogy ha az első számjegyet elhagyjuk, akkor egy 9-cel osztható, ha a másodikat, akkor egy 2-vel osztható, ha a harmadikat, akkor egy 5-tel osztható, ha a negyediket, akkor egy 4-gyel osztható háromjegyű számot kapunk. Hány ilyen négyjegyű szám van?

Megoldás

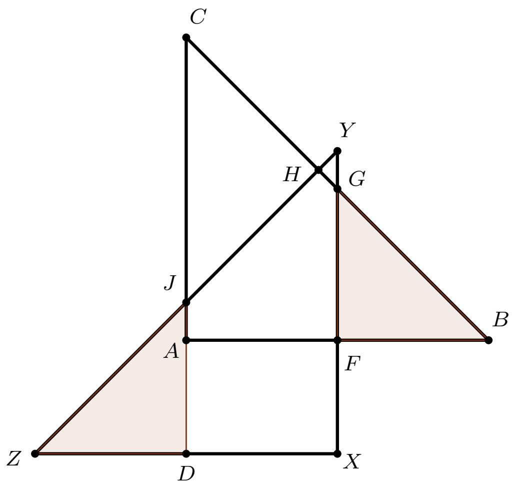
Az utolsó számjegy páros, hiszen, ha a második számjegyet elhagyjuk, akkor páros számot kapunk. Másrészt 5-tel is osztható az utolsó számjegy, hiszen a harmadik számjegyet elhagyva 5-tel osztható számot kapunk. Vagyis az utolsó számjegy 0. Mivel az első számjegyet elhagyva 9-cel osztható számot kapunk, ezért az utolsó három számjegy összege 9-cel osztható. Mivel az utolsó 0, ezért a középső két számjegy összege osztható 9-cel. Az utolsó számjegyet elhagyva 4-gyel osztható számot kapunk, vagyis a középső két számjegyet tekintve egy 4-gyel osztható számot kapunk. Ez a kétjegyű szám a korábbiak miatt 9-cel is osztható, így csak 36 és 72 lehet. Vagyis a szám $\overline{a360}$ vagy $\overline{b720}$ alakú. Az első számjegytől függetlenül most már minden feltétel teljesülni fog, tehát csak arra kell figyelnünk, hogy nem lehet két azonos számjegye a számnak. Vagyis a és b is 7-7 különböző értéket vehet fel. Tehát $2 \cdot 7 = 14$ megfelelő szám létezik.

2. Egy 4 cm oldalú négyzetet kettévágtunk az átlója mentén, majd a kapott ABC és XYZ háromszögeket az ábra szerint helyeztük el. Az AB és XZ szakaszok párhuzamosak, F pedig éppen az AB szakasz felezőpontja. Tudjuk, hogy a CHJ háromszög területe 3 cm^2-rel nagyobb a GHY háromszög területénél. Milyen hosszú az FX szakasz?



1. megoldás

Hosszabbítsuk meg az AC szakaszt, A-n túl, és legyen D az a pont, ahol elmetszi az XZ oldalt.



Írjuk fel a két háromszög területét, amikről tudjuk, hogy egyenlők: $T_{ABC} = T_{FBG} + T_{CHJ} + T_{AFGHJ}$, illetve $T_{XYZ} = T_{DJZ} + T_{DXFA} + T_{GHY} + T_{AFGHJ}$. Tudjuk, hogy $T_{CHJ} - T_{GHY} = 3\,\mathrm{cm}^2$, ezért:

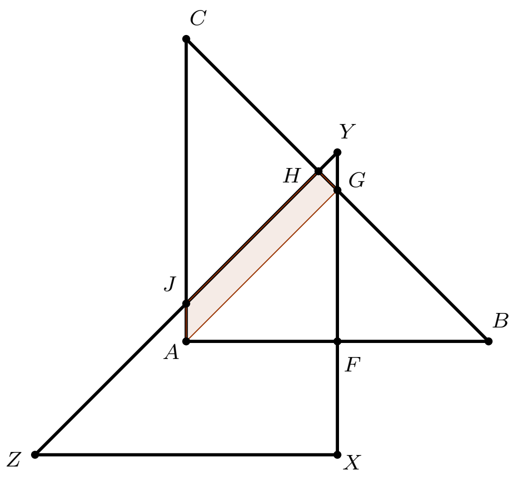
$$T_{FBG} + 3 = T_{DJZ} + T_{DXFA}.$$

FBG és DJZ háromszögek derékszögűek, egyenlő szárúak, és a befogójuk azonos hosszúságú, ezért egyenlő a területük. Vagyis $T_{DXFA} = 3$. Mivel $AC \parallel XY$ és $AB \parallel XZ$, és $DXF\sphericalangle$ derékszög, ezért $DXFA$ téglalap. Tudjuk, hogy $AF = 2$, amiből következik, hogy a kérdésben szereplő FX szakasz hossza $\frac{3}{2}$.

2. megoldás

Az ábrán látható egyenlő szárú, derékszögű háromszögek miatt $AF = FB = GF = 2$, illetve $GB = GA = GC = 2\sqrt{2}$. Egészítsük ki a GHY és a CHJ háromszöget is az $AGHJ$ négyszöggel. Ekkor tudjuk, hogy

$$T_{CGA} - T_{AGYJ} = 3.$$



Mivel $T_{CGA} = 4$, ezért $T_{AGYJ} = 1$. Másrészt viszont $T_{AGYJ} = AG \cdot GH$, amiből kapjuk, hogy $GH = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Ebből pedig következik, hogy $GY = \frac{1}{2}$. Vagyis $FX = XY - GY - FG = 4 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{3}{2}$.

3. Egy $n\times n$-es négyzetrács bal felső sarokmezője fekete, a többi fehér. Minden lépésben kiválaszthatunk egy olyan fehér mezőt, amelynek páratlan számú fekete oldalszomszédja van, és beszínezhetjük feketére. Elérhető-e ilyen lépésekkel, hogy minden mező fekete legyen, ha

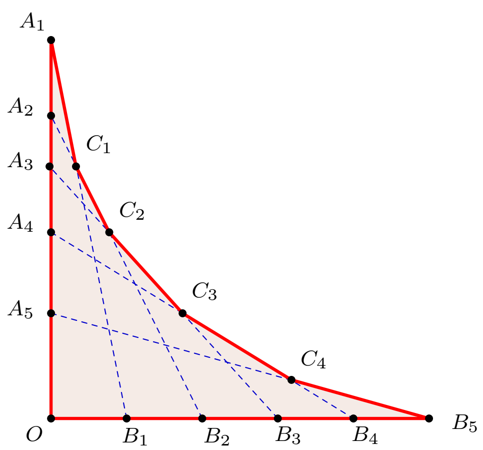
(a) $n = 7$?

(b) $n = 8$?

Megoldás
Az a) esetben egy megfelelő színezés: felülről lefelé haladva színezzük be az első oszlop összes mezőjét feketére. Ezután balról jobbra haladva színezzük be az 1., a 3., az 5. és a 7. sor mezőit feketére. (Eddig minden lépésben olyan mezőt színeztünk feketére, melynek egy fekete oldalszomszédja volt). Végül balról jobbra haladva színezzük feketére a 2., 4. és 6. sor mezőit (most pedig minden feketére színezett mezőnek három fekete oldalszomszédja volt). A b) eset lehetetlensége: vizsgáljuk a fekete mezőkből álló alakzat kerületét. Ez a kerület kezdetben 4, és minden lépésben kettővel nő vagy kettővel csökken. (Ha egy fekete szomszédja volt az új fekete mezőnek, kettővel nő, ha három fekete szomszédja volt az új fekete mezőnek, kettővel csökken.) Ha minden mezőt feketére lehetne színezni, 63 lépést kéne tennünk. Mivel két lépést téve a kerület változása -4, 0 vagy +4, így 62 lépés után a fekete mezőkből álló alakzat kerülete osztható 4-gyel, 63 lépés után pedig 4-gyel osztva 2 maradékot ad. Így nem lehet egyenlő a négyzet kerületével, $4 \cdot 8 = 32$-vel, tehát nem lehet minden mezőt feketére színezni.

4. Van-e olyan 2016 oldalú sokszög, amelynek bármely két oldalegyenese metszi egymást, és minden metszéspont a sokszög belsejében vagy határán található?

Megoldás
Vegyük fel az O pontból kiinduló egymásra merőleges félegyeneseket. Vegyünk fel mindkét félegyenesen egy-egy pontot, legyenek ezek A_1 és B_1. Vegyünk fel egy A_2 pontot az OA_1 szakaszon és egy B_2 pontot a B_1-től jobbra az OB_1 egyenesen. Kössük össze az A_1 és a B_1 pontokat, illetve az A_2 és a B_2 pontokat. Legyen a metszéspontjuk C_1. Ezt követően legyen a C_1 pont merőleges vetülete az OA_1-re A_3. Vegyük fel B_3-at az OB_1 egyenesen B_2-től jobbra. Ekkor az A_3B_3 szakasz metszeni fogja A_2B_2 szakaszt. Legyen a metszéspont C_2. Legyen A_4 a C_2 merőleges vetülete az OA_1 egyenesen. Folytassuk tovább ezt az eljárást. Az ábrán látható $OA_1C_1C_2C_3C_4B_5$ sokszög megfelelő példa hétszögre. Hasonló módon konstruálható meg egy $OA_1C_1C_2 \dots C_{2013}B_{2014}$ sokszög melynek 2016 csúcsa van és megfelel a feladat feltételeinek.



Miért jó ez a konstrukció? Nézzük sorra az OA_1B_1, $OA_1C_1B_2$, $OA_1C_1C_2B_3$, $\dots$ $OA_1C_1C_2...C_{2013}B_{2014}$ sokszögeket. Az OA_1B_1 háromszögre nyilván igaz, hogy minden metszéspont belül vagy a határon van. Az i-edik lépésben az előző sokszöget egyesítjük az $OA_{i+1}B_{i+1}$ háromszöggel, ezáltal megmaradnak az eddigi oldalegyenesek, és hozzájuk adódik az $A_{i+1}B_{i+1}$ egyenes. Minden belül vagy határon lévő pont továbbra is belső vagy határon lévő pont marad. Új metszéspontok az $A_{i+1}B_{i+1}$ egyenesen keletkeznek. A korábbi oldalegyenesek az $OA_{i+1}B_{i+1}$ háromszöget az OA_{i+1} oldalon nem metszhetik A_{i+1} választása miatt, az OB_{i+1} oldalon viszont metszik B_{i+1} választása miatt. Ezért ezeknek a háromszöget az $A_{i+1}B_{i+1}$ oldalon is metszeniük kell. Tehát az $A_{i+1}B_{i+1}$ egyenesnek a korábbiakkal vett metszéspontjai mind az $A_{i+1}B_{i+1}$ szakaszra esnek, amelynek viszont minden pontja az új sokszög belsejében vagy határán van. Tehát ha az i-edik sokszögre teljesült a feltétel, akkor az $i+1$-edikre is, így végül az $OA_1C_1C_2...C_{2013}B_{2014}$ sokszög is teljesíti a feltételt.

45. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – Első nap

NYOLCADIK OSZTÁLY

1. Sárkányországban minden sárkánynak legalább 3 feje van. Azok a sárkányok, amelyeknek páratlan sok fejük van, mindig igazat mondanak, amelyeknek páros sok, mindig hazudnak. Négy sárkány éppen bridzselt, amikor megkérdezték őket, hogy négyüknek összesen hány fejük van. A következő válaszok érkeztek: 14, 15, 16, 20. Hány feje van összesen az igazmondó sárkányoknak? Add meg az összes lehetőséget!

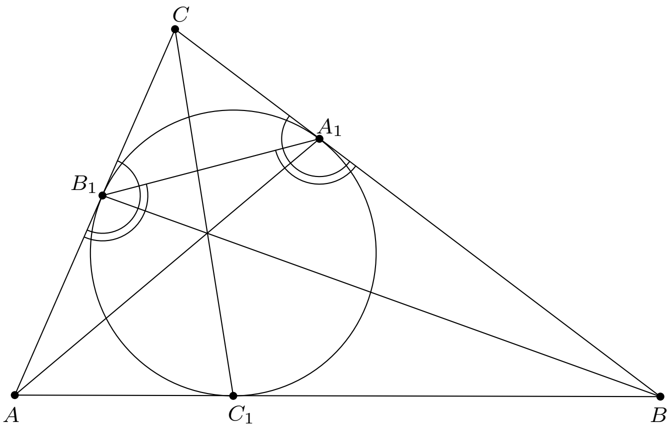
   Megoldás
   Elképzelhető, hogy egyetlen igazmondó sincs közöttük, és a fejeik száma 4 olyan páros szám, amelyeknek az összege se nem 14, se nem 16, se nem 20. Például lehet mindnek 8 feje. Ha van köztük igazmondó, akkor legfeljebb egy lehet, mert minden válasz különböző. Vagyis egy sárkány van, amelynek páratlan számú feje van és három, amelynek páros. A fejeik számának összege tehát páratlan. Vagyis összesen 15 fejük van. A hazug sárkányoknak legalább 4, az igazmondóknak legalább 3 feje van, így három hazug és egy igazmondó sárkánynak legalább 15 $(3 + 4 + 4 + 4)$ feje van. Tehát csak az képzelhető el, hogy a hazug sárkányoknak pontosan 4, az egyetlen igazmondónak pontosan 3 feje van, vagyis a válasz **0 vagy 3**.

2. Egy kör mentén elhelyeztünk n darab pozitív egész számot úgy, hogy bármely két szomszédos szám közül az egyik osztója a másiknak, ugyanakkor a nem szomszédos számpárok egyike sem áll osztó-többszörös viszonyban.
   Döntsük el, hogy a $3 \leq n \leq 20$ számok közül melyekre lehetséges ez.

   Megoldás
   Belátjuk, hogy ha $n \geq 4$ páratlan szám, nem lehetséges, egyébként pedig lehetséges. Először tekintsük azt az esetet, ha $n \geq 4$ páratlan. Tekintsük a kör mentén a szomszédokból alkotott párokat. Ilyen párból is n darab van. Színezzünk egy ilyen (a, b) párt pirosra, ha $a|b$, kékre, ha $b|a$ (a jelöli a pár azon tagját, amely az óramutató járása szerint körbejárva korábban szerepel). (Ha $a = b$, válasszunk a piros és a kék szín közül tetszés szerintit.) Mivel páratlan sok (n darab) párunk van, kell lennie két szomszédos párnak, melyek azonos színt kapnak. Ha ez a két pár (a, b) és (b, c), akkor az azonos szín miatt vagy $a|b$ és $b|c$, és ekkor $a|c$, vagy $c|b$ és $b|a$, ekkor pedig $c|a$: mindkét esetben ellentmondást kaptunk, hiszen c és a nem szomszédos (itt kell, hogy $n \geq 4$).
   Most legyen $n = 3$: egy jó kitöltés, ha mindhárom szám egyforma.
   Ha $n = 4$, akkor a $2, 30, 3, 42$ számok megfelelnek a feladat feltételeinek. Legyen ezután $n \geq 6$ páros. Legyen $k = n/2$. Vegyünk k darab különböző prímszámot, legyenek ezek p_1, p_2,..., p_k. (Nem kell hivatkozni arra, hogy végtelen sok prímszám van, hiszen $n \leq 20$, azaz 10 különböző prímszám elegendő.) Ezután egy jó kitöltés az óramutató járása szerint körbejárva: p_1, p_1p_2, p_2, p_2p_3,..., p_k, p_kp_1.

3. Az ABC háromszög oldalait a beírt köre az A_1, B_1, C_1 pontokban érinti (az A_1 pont a BC, a B_1 pont az AC, a C_1 pont az AB oldalán található). Bizonyítsd be, hogy ha $AA_1 = BB_1 = CC_1$, akkor a háromszög szabályos.

   1. Megoldás



Belátjuk, hogy az AB_1A_1 és a BA_1B_1 háromszögek egybevágók.

A két háromszögben $AA_1 = BB_1$ a feladat feltétele alapján, az A_1B_1 oldal pedig közös. Vegyük még észre, hogy a CA_1B_1 háromszögben $CA_1 = CB_1$, mert az egy pontból húzott érintő szakaszok egyforma hosszúak. Ekkor viszont $CA_1B_1\sphericalangle = CB_1A_1\sphericalangle$, azaz kiegészítő szögeik is egyenlők: $AB_1A_1\sphericalangle = BA_1B_1\sphericalangle$, és nagyobbak mint 90°, azaz AA_1 és BB_1 hosszabb oldal, mint A_1B_1: vagyis a két háromszög egybevágó. Ezek szerint $AB_1 = BA_1$, továbbá láttuk, hogy $CA_1 = CB_1$, ezeket összerakva tehát $CA = CB$. Mivel a csúcsoknak a feladatban nincs kitüntetett szerepe, így $AB = AC$-nek is teljesülnie kell, és ez volt a bizonyítandó.

2. megoldás

Tekintsük az AB_1B és a AC_1C háromszögeket. A két háromszögben $BB_1 = CC_1$ a feladat feltétele alapján, továbbá $AB_1 = AC_1$, mert az egy pontból húzott érintő szakaszok egyforma hosszúak. Közös továbbá a két háromszög A csúcsnál lévő szöge. Nem nehéz meggondolni, hogy a két háromszög egybevágó, vagy a B_1 és C_1 csúcsnál lévő szögeik 180°-ra egészítik ki egymást. Az első esetben $AB = AC$, a második esetben pedig egyszerű szögszámolás mutatja, hogy $\alpha = 60°$. Ezt minden csúcsnál eljátszhatjuk (az A helyett). Így a következő lehetőségeink vannak: mindhárom-szor azt kapjuk, hogy az adott csúcsnál lévő szög 60°, azaz a háromszög szabályos, készen vagyunk; mindháromszor azt kapjuk, hogy a csúcsból induló két oldal egyforma hosszú, azaz mindhárom oldal egyforma hosszú. a háromszög szabályos; végül a két eset vegyesen fordul elő, ekkor pedig a háromszög egyenlő szárú háromszög, melynek van 60°-os szöge, ami csak úgy lehetséges, ha szabályos. (Skatulyaelvvel is érvelhetünk: hiszen ha már kétszer azt kaptuk, hogy a csúcsnál lévő szög 60°, illetve a csúcsból induló oldalak egyforma hosszúak, már akkor is szabályos a háromszög). Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Megjegyzés

A fenti megoldások azt az egybevágósági alapesetet használják, amikor két oldal és az egyikkel szemközti szög van megadva: figyelni kell arra, hogy ekkor még nem feltétlenül egybevágók a háromszögek, csak ha pl. az is be van látva, hogy a két oldallal közül a nagyobbal szemközti szög az adott.

4. Egy számból kivonjuk a számjegyeinek összegét. Hányféle különböző számot kapunk, ha az előző eljárást végrehajtjuk az összes háromjegyű számon?

Megoldás

Legyen egy háromjegyű szám $\overline{abc} = 100a+10b+c$. A műveletet végrehajtva az eredmény: $100a+10b+c-(a+b+c) = 99a+9b = 9(11a+b)$. Vegyük észre, hogy $11a+b$ minden (a, b) számjegykombináció esetén más eredményt ad, hiszen ha $11a_1 + b_1 = 11a_2 + b_2$, akkor $11(a_1 - a_2) = b_2 - b_1$. $b_2 - b_1$

két számjegy különbségeként -9 és 9 közé esik, és oszható 11-gyel: így muszáj 0-nak lennie. Ekkor persze $a_1 - a_2$ szintén 0, azaz $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$, ugyanarról a számjegypárról van szó. Így tehát a feladat kérdésére a válasz: $9 \cdot 10 = 90$.

5. Keresd meg az összes olyan (végtelen) számtani sorozatot, amely teljesíti a következő feltételeket:
(i) a sorozat tagjai pozitív egész számok,
(ii) a sorozat minden tagja nagyobb, mint az őt megelőző tagok,
(iii) ha egy szám tagja a sorozatnak, akkor a számjegyeinek összege is tagja a sorozatnak.
(Egy számtani sorozatban bármely két egymást követő tag különbsége állandó.)

Megoldás
A megfelelő sorozatok: az összes pozitív egész, 3-mal osztva egy adott maradékot adó számok, illetve 9-cel osztva egy adott maradékot adó számok. Az elsőről világos, hogy megfelelő, a hármas differenciájúak azért jók, mert egy szám és a számjegyeinek összege ugyanazt a maradékot adja 3-mal osztva, és hasonló igaz 9 esetén is. (Ha van legalább egy jó példa a pozitív egészeken kívül, a versenyző mindenképp kapjon 1 pontot.) Bebizonyítjuk, hogy nincs más megfelelő sorozat.
Vegyük a sorozat egy tetszőleges tagját. Bebizonyítjuk, hogy a tag kilences maradéka is szerepel a sorozatban (ha a tag osztható 9-cel, akkor a 9 szerepel). Vegyük az ugyanekkora maradékot adó tagok közül a legkisebbet. Ha ez egyjegyű, készen vagyunk. Ha nem, akkor vegyük a számjegyeinek összegét: ez a szám ugyanazt a 9-es maradékot adja, mint az eredeti tag, de kisebb nála, és a feladat feltétele alapján szerepelnie kéne a sorozatban: ellentmondás. (Ha hasonló gondolatmenettel valaki annyit lát be, hogy a sorozat első tagja egyjegyű, ez a rész 1 pontot ér.) Belátjuk, hogy a sorozat differenciája egyjegyű. Legyen d a differencia, és tegyük fel, hogy legalább kétjegyű. A sorozat első (az előzőek alapján egyjegyű) tagja legyen a. d jegyeinek összege legyen $0 < e < d$. A sorozatban szerepel $a + 10d$, melyben a jegyek összege $a + e$, de ez a szám a sorozat két szomszédos tagja, a és $a+d$ közé esik, ami ellentmondás. Innentől végig kell nézni (módszeresen vagy kevésbé módszeresen) a lehetséges eseteket.
Ha sorozat differenciája nem osztható 3-mal, akkor a sorozatban minden 9-es maradék elő fog fordulni, így a sorozatnak tagja lesz az 1 és a 2 is, azaz minden pozitív egész.
Ha sorozat differenciája 3, akkor a kétjegyű számoktól kezdve az összes adott hármas maradékú számot tartalmazni fogja a sorozat, azaz benne lesz a 10, a 20 vagy 30, és így az 1, a 2 vagy a 3 is.
Ha a sorozat differenciája 6, akkor a kétjegyű számoktól kezde az összes adott hatos maradékú számot tartalmazni fogja a sorozat. Ha ez a maradék 1, akkor tagja lesz a 13, de abban a számjegyek összege 4, ellentmondás. Ha a maradék a 2, akkor tagja lesz a 14, de abban a számjegyek összege 5, ellentmondás. A többi esetben is hasonló ellentmondást kapunk, tehát a differencia nem lehet 6.
Ha sorozat differenciája 9, akkor pedig az összes adott 9-es maradékú számot megkapjuk, és ezek a sorozatok meg is felelnek a feladat feltétele-inek. Ezzel bebizonyítottuk, hogy nincs más lehetőség, mint az elején felsorolt sorozatok. (A feladatra természetesen akkor is jár a teljes pontszám, ha a versenyző belátja, hogy az első tag és a differencia is egyjegyű, és az adódó véges sok lehetőséget végignézi.)

45. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – Második nap

NYOLCADIK OSZTÁLY

1. Három egymást követő háromjegyű számot (az eredeti sorrendjükben) egymás után írunk, így egy kilencjegyű számot kapunk. Igaz-e, hogy az így kapott szám mindig osztható 3-mal?

   1. megoldás
   Bebizonyítjuk, hogy a kapott szám mindig osztható hárommal. Legyen a három egymást követő háromjegyű szám n, $n+1$, $n+2$. Ekkor a kilencjegyű szám így írható fel: $1000000n+1000(n+1)+(n+2)$. Átalakítva azt kapjuk, hogy ez a szám: $1001001n+1002$. Mivel 1001001 és 1002 is osztható 3-mal, az állítást bebizonyítottuk.

   2. megoldás
   A feladat állítása igaz tetszőleges három egymást követő számra, és az egymás után írás sorrendje se számít. A kapott számban a számjegyek összege megegyezik az eredeti három szám számjegyeinek összegével. Mivel egy számban a számjegyek összege megegyezik a szám hármas maradékával, így a három egymást követő szám számjegyei összegeinek hármas maradékai 0, 1 és 2 (valamilyen sorrendben). Így a számjegyek összegei összegének hármas maradéka $0+1+2=3$, azaz osztható 3-mal. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

   3. megoldás
   A feladat állítása igaz tetszőleges három egymást követő számra, és az egymás után írás sorrendje se számít. Csak annyit kell észrevenni, hogy ha egy szám mögé nullákat írunk, a szám hármas maradéka nem változik meg, hiszen 10-nek egy hatványával szoroztuk meg, ami mindig 1 maradékot ad 3-mal osztva (hivatkozhatunk a 3-as oszthatósági szabályra is). A számok egymás után írásával kapott számot úgy is előállíthatjuk, hogy az eredeti számaink mögé megfelelő számú nullát írunk, és az így kapott három számot összeadjuk. Tehát ha a három egymást követő szám n, $n+1$ és $n+2$, akkor a feladatban előállított szám hármas maradéka ugyanaz, mint $n+(n+1)+(n+2)$ hármas maradéka. Mivel ez a szám $3n+3$, mindig osztható hárommal, és ez volt a bizonyítandó.

2. Egy 8×8-as pontrács pontjait két játékos felváltva köti össze szakaszokkal. Két szakasznak nem lehet közös pontja. (A végpontjuk sem lehet közös.) Aki nem tud lépni, veszít. Van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája? Ha igen, adj is meg egy nyerő stratégiát.

   Megoldás
   A kezdő játékosnak van nyerő stratégiája. A kezdő játékos összeköt két olyan pontot, melyek középpontosan szimmetrikusak a pontrács középpontjára. Ezután a kezdő játékos mindig középpontosan tükrözi a második játékos lépését. Be kell látnunk, hogy így mindig szabályosat fog lépni. A második játékos lépésével nem lehet közös pontja az első játékos lépésének. Tegyük fel, hogy lenne, a P pont. Ekkor P tükörképe a középpontra, P' is közös pont. Ekkor azonban a PP' szakasz minden pontja közös pont, vagyis a tükrözés középpontja is. A tükrözés középpontja azonban nem lehet közös pont, mert azt tartalmazza az elsőnek megrajzolt szakasz, így már a második játékos lépése is szabálytalan lett volna. A korábbi szakaszokkal pedig azért nem lehet közös pontja az első játékos lépésének, mert azokra teljesül, hogy ha egy szakasz be van rajzolva, akkor a középpontra vett tükörképe is, tehát akkor a második játékos lépésének is lenne közös pontja egy korábban megrajzolt szakasszal.

   Megjegyzés

A leírt megoldás csak középpontos tükrözéssel működik, tengelyessel nem, ugyanis a megoldás során kulcsfontosságú volt, hogy ha egy szakasz és a képének van közös pontja, akkor a transzformáció fixpontja is közös pont, de abból végtelen sok van a tengelyes tükrözénél. Persze a tengelyes tükrözés is működik, de fontos, hogy az elsőnek választott szakasz a tengelynek a pontrácsba eső szakasza legyen, és ezzel le legyen fedve az összes fixpont.

3. Egy $n \times n$-es négyzetrács bal felső sarokmezője fekete, a többi fehér. Minden lépésben kiválaszthatunk egy olyan fehér mezőt, amelynek páratlan számú fekete oldalszomszédja van, és beszínezhetjük feketére. Elérhető-e ilyen lépésekkel, hogy minden mező fekete legyen, ha

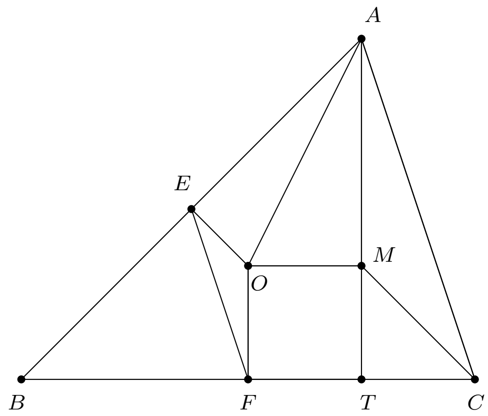
   (a) $n = 7$?

   (b) $n = 8$?

   Megoldás
   Az a) esetben egy megfelelő színezés: felülről lefelé haladva színezzük be az első oszlop összes mezőjét feketére. Ezután balról jobbra haladva színezzük be az 1., a 3., az 5. és a 7. sor mezőit feketére. (Eddig minden lépésben olyan mezőt színeztünk feketére, melynek egy fekete oldalszomszédja volt). Végül balról jobbra haladva színezzük feketére a 2., 4. és 6. sor mezőit (most pedig minden feketére színezett mezőnek három fekete oldalszomszédja volt). A b) eset lehetetlensége: vizsgáljuk a fekete mezőkből álló alakzat kerületét. Ez a kerület kezdetben 4, és minden lépésben kettővel nő vagy kettővel csökken. (Ha egy fekete szomszédja volt az új fekete mezőnek, kettővel nő, ha három fekete szomszédja volt az új fekete mezőnek, kettővel csökken.) Ha minden mezőt feketére lehetne színezni, 63 lépést kéne tennünk. Mivel két lépést téve a kerület változása -4, 0 vagy +4, így 62 lépés után a fekete mezőkből álló alakzat kerülete osztható 4-gyel, 63 lépés után pedig 4-gyel osztva 2 maradékot ad. Így nem lehet egyenlő a négyzet kerületével, $4 \cdot 8 = 32$-vel, tehát nem lehet minden mezőt feketére színezni.

4. A hegyesszögű ABC háromszög magasságpontja M, köréírt körének középpontja O, a BC oldal felezőpontja F és az A csúcsból induló magasság talppontja T. Tudjuk, hogy $MOFT$ egy egységnyi oldalú négyzet. Mekkora a háromszög területe? (A háromszög magasságpontjának nevezzük a magasságvonalak metszéspontját.)

   Megoldás
   Legyen az AB oldal felezőpontja E. Az AMC és az OEF háromszögek hasonlók egymáshoz, mert oldalaik párhuzamosak AC és EF a közép-vonal jól ismert tulajdonsága miatt párhuzamos, OE pedig az AB oldal felezőmerőlegese, azaz merőleges AB-re, akárcsak a magasságvonal részeként az MC szakasz. A hasonlóság aránya $2 : 1$, hiszen a középvonal fele olyan hosszú, mint a megfelelő oldal. Így tehát $AM = 2OF$, azaz AM hossza 2 egység. Az AOM derékszögű háromszögből AO hosszára (azaz a körülírt kör sugarára) $\sqrt{5}$ adódik. Mivel $OF = 1$, az OFC derékszögű háromszögből $FC = 2$ adódik. (Vagy az OFC háromszög egybevágó az OMA háromszöggel: ezek egymás 90°-os elforgatottjai.) Tehát a BC oldal hossza $2 \cdot 2 = 4$, az AM magasság hossza $1 + 2 = 3$, vagyis a háromszög területe $(4 \cdot 3)/2 = 6$ egység.



2. megoldás
Az előző megoldásban észrevettük, hogy az OFC és az OMA háromszög egymás 90°-os elforgatottja. Innen $COA\sphericalangle = 90°$. Némi szögszámolással innen kihozható, hogy $\beta = 45°$. Innen pedig $MCT\sphericalangle = 45°$, vagyis az MCT háromszög egy egyenlő szárú derékszögű háromszög. Így $TC = TM = 1$, azaz $FC = 1 + 1 = 2$, ahonnan $BC = 4$. Ebből az is adódik, hogy $BT = 3$, ahonnan $TA = 3$, hiszen ABT is egyenlő szárú derékszögű háromszög. Innen a háromszög területe 6 egység.