**TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT**
1088 Budapest, Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu, www.telc.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900 Fax: 327-8901.
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

## 47. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

**Országos döntő – 1. nap**

## HATODIK OSZTÁLY

# JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Egy számot emelkedőnek nevezünk, ha balról jobbra olvasva minden számjegye nagyobb az előtte állónál. (Például a 36 és a 257 emelkedő számok.) Hány olyan négyjegyű emelkedő szám van, amelyet 5-tel megszorozva emelkedő számot kapunk?

**Megoldás**

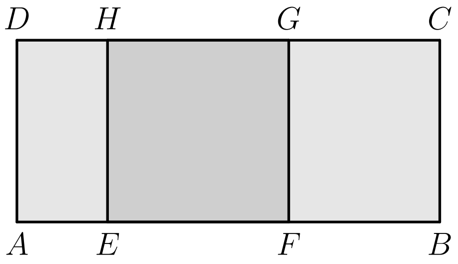
Jelöljön $x = \overline{abcd}$ egy megfelelő emelkedő számot. Ezáltal $d$-nek legalább 4-nek kell lennie.
Egy 5-tel osztható szám végződése vagy 0, vagy 5, de tekintettel arra, hogy $5x$ emelkedő, így annak 5-re kell végződnie. (***2*** *pont*)
Ebből az is következik, hogy $d$ páratlan, vagyis lehetséges értékei: 5, 7 vagy 9.
Egy négyjegyű szám ötszöröse vagy négyjegyű, vagy ötjegyű. (***1*** *pont*)
Amennyiben $5x$ ötjegyű, úgy csakis az 12345 jöhet szóba, hiszen 5-re végződik. Ekkor $x = 2469$, mi emelkedő, azaz teljesíti a feltételeket. (***2*** *pont*)
Ha $5x$ négyjegyű, akkor világos, hogy $a$-nak 1-nek kell lennie. Viszont ekkor $5x$ első jegye legalább 5 lenne, s mivel az utolsó jegye szintén 5, nem lenne emelkedő. (***2*** *pont*)
Csak egy megfelelő négyjegyű szám van tehát, a 2469. **Összesen: 7 pont**

2. Rita, Sára és Tamara egy kórasztal körül ülnek, előttük egy-egy kupac kavics (nem feltétlen egyforma kupacok). Mindhárman egyszerre a saját kupacuk egyharmadát a tőlük jobbra ülőnek, egyharmadát a tőlük balra ülőnek átadják, a többit megtartják. (Ezt mindhárman pontosan meg tudják tenni.) Megmondható-e, hogy most melyikük előtt hány db kavics van, ha csak azt tudjuk, hogy az asztalon összesen 876 db kavics hever?

**Megoldás**

Miután átrakta mindenki a saját kupaca egy-egy harmadát a tőle jobbra, illetve balra ülőnek, világos, hogy mindenkinél mindhármuk kupacának egyharmada lesz, vagyis az összes kavics egyharmada. Tehát mindhármuk előtt végül $876/3 = 292$ kavics lesz. (***7*** *pont*)

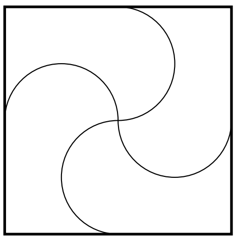
3. Az $ABCD$ téglalap $AB$ oldalán felvettük az $E$ és $F$ pontokat, $CD$ oldalán pedig a $G$ és $H$ pontokat az ábra szerint. Tudjuk, hogy $EFGH$ négyszög egy négyzet, valamint azt, hogy az $AF$ szakasz 63 cm, a $CH$ szakasz 77 cm hosszú. Mennyi az $ABCD$ téglalap kerülete?




**Megoldás**

A $CH$ szakasz hossza megegyezik az $EB$ szakasz hosszával. (***1** pont*)
Világos, hogy ha az $AF$ szakasz hosszát és az $EB$ szakasz hosszát összeadjuk, akkor az kapott érték megegyezik az $AB$ szakasz hosszának és az $EFGH$ négyzet oldalának az összegével. (***2** pont*)
Másrészt ez az összeg éppen a téglalap kerületének a fele, hiszen a $BC$ szakasz hossza éppen az $EFGH$ négyzet oldalhosszával egyenlő. (***2** pont*)
A téglalap kerülete tehát: $2 \cdot (63 + 77) = 280$. (***2** pont*)
**Összesen: 7 pont**

4. Anna játékkészletében az ábrán látható mintájú színes lapok szerepelnek. A négy egybevágó tartomány mindegyike a kék, sárga, zöld vagy piros színek valamelyikével van színezve. A készletben csak olyan lapok vannak, aminél két tartomány különböző színű, ha van közös határvonala. Hány különböző lapot tartalmazhat legfeljebb Anna készlete? (A forgatással egymásba vihetőket nem tekintjük különbözőnek.)



**Megoldás**

Világos, hogy egyik lap sem lehet egyszínű.
Ha két színnel van kiszínezve egy lap, azt csakis egyféleképpen valósíthatjuk meg, ha felváltva színezünk. Mivel a két szín kiválasztása 6-féleképpen történhet, így 6 lap van, ami kétszínű. (***2** pont*)

Ha három színnel van kiszínezve egy lap, az csak úgy valósulhat meg, hogy két szemben lévő (határvonalaktól mentes) tartomány egyszínű, a másik két szemben lévő pedig a másik két színű. A forgatás miatt az utóbbiak színezésének sorrendje tetszőleges. Azt, hogy melyikből legyen két szín, négyféleképpen választhatjuk ki, és hogy mi legyen a másik két szín, háromféleképpen (három színből melyik maradjon ki). Így összesen $4 \cdot 3 = 12$ lap van, ami háromszínű. (***2** pont*)
Ha mind a négy színnel van kiszínezve egy lap, akkor az 6-féleképpen történhet. Ennek belátásához színezzük ki az egyik tartományt tetszőlegesen. A másik három tartományt 3!-féleképpen színezhetjük ki. Könnyen látható, hogy ezzel az összes színezést megkaptuk, és egyik színezés sem vihető át a másikba forgatással. (***2** pont*)
Összesen tehát $6 + 12 + 6 = 24$ lapból áll Anna játékkészlete. (***1** pont*)

**Összesen: 7 pont**

5. Egy $4 \times 4$-es táblázatot az itt látható módon kitöltöttünk számokkal. A táblázat bal felső sarkából indulva lépkedhetünk a táblázat mezőin, az alábbi szabályok szerint:

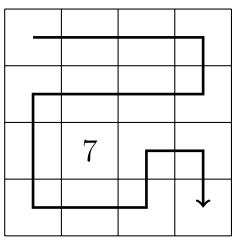
| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 10 | 4 | 8 |
| 12 | 6 | 16 | 2 |
| 5 | 7 | 1 | 14 |
| 15 | 13 | 11 | 3 |

- mindig csak élszomszédos mezőre léphetünk
- egy mezőre csak egyszer szabad rálépni
- a sétának a jobb alsó sarokmezőben kell végződnie.

Legfeljebb mennyi lehet a séta során bejárt mezőkre írt számok összege?

**1. megoldás**

Ha a táblázatot sakktáblaszerűen színezzük, akkor a séta első és utolsó mezője azonos színű. Mivel a séta során felváltva lépünk világos és sötét mezőkre, ezért a séta eggyel többet érint a kiindulóval azonos színű mezőkből. Emiatt legalább egy kimarad a másik színű mezőkből. (***3** pont*)
Ezek közül a legkisebb értékű a 7-es. Ezért a lehetséges összegek mindegyike legalább 7-tel kevesebb az összes szám összegénél. (***1** pont*)
Az, hogy az összes szám összegéből csak 7-et veszítsünk, el is érhető, például így:




(***2** pont*)

A bejárt mezőkre írt számok összege $1+2+\ldots+16-7=\frac{16\cdot 17}{2}-7=136-7=129$. (***1** pont*)

**Összesen: 7 pont**

**2. megoldás**

Azt állítjuk, a lehető legnagyobb összeg a 129. Ezzel az összeggel egy lehetséges bejárást mutat az előző megoldásban szereplő ábra. (***3** pont*)

Ha létezik ennél nagyobb összegű bejárás, akkor abban a kihagyott mezők összértéke legfeljebb 6 lehet. Vagyis a 7, 8, ..., 16 értékű mezők mindegyikére rá kell lépnünk, és természetesen a 3-asra is. (***1** pont*)

Ahhoz, hogy a 15-ösön át tudjunk haladni, rá kell lépni az 5-ösre is. Ahhoz, hogy a 8-ason át tudjunk haladni, rá kell lépni a 4-esre és a 2-esre is. (***1** pont*)

Ahhoz, hogy a 10-esre és a 12-esre is rá tudjunk lépni, nem hagyható ki a 6-os mező. Hasonlóan, a 11 és a 14 érintése miatt nem hagyható ki az 1-es sem. (***1** pont*)

Tehát csak úgy lehetne nagyobb összeget kapni, ha az összes mezőn áthaladnánk. Ilyen séta azonban nincs, hiszen a 9-estől a 3-asig csak páros számú lépéssel mehetünk, az összes mező egyszeri bejárásához azonban 15 lépést kellene tenni. (***1** pont*)

**Összesen: 7 pont**

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Kartal, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TMV-17-0114. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma és a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Tehetség Program
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Emberi Erőforrás Támogatáskezelő
nka Nemzeti Kulturális Alap