TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

48. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló

HETEDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Bizonyítsd be, hogy 2019 db egymást követő pozitív egész szám közül mindig kiválasztható 19 db úgy, hogy az összegük osztható legyen 2019-cel!

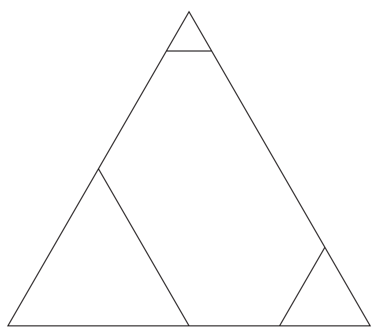
1. megoldás

Nézzük először az 1, 2, 3, ..., 2019 számokat. Ezek közül az 1, 2, ..., 9, 2010, 2011, ..., 2019 számokat kiválasztva az összeg osztható 2019-cel, hiszen $1 + 2018 = 2 + 2017 = \ldots = 9 + 2010 = 2019$. Ezután növeljük 1-gyel a 2019 egymást követő szám mindegyikét. Ha a kiválasztott számaink szerepelnek a megnövelt számok között is, akkor az összegük továbbra is megfelelő. Ha a legkisebb szám ki volt választva, akkor helyette vegyük be az újonnan belépő legnagyobbat. Ez éppen 2019-cel nagyobb nála, így a 19 szám összege 2019-cel nőtt, azaz továbbra is osztható maradt 2019-cel. Így akárhányszor léptetjük a 2019 egymást követő számot, mindig lesz köztük 19 db szám, amelyek összege oszható 2019-cel, ezt kellet bizonyítani.

2. megoldás

Elég az egymást követő számok 2019-cel vett osztási maradékát vizsgálni. Ezek valamilyen sorrendben éppen a $0, 1, 2, \ldots, 2018$ számok. Ezekből szeretnénk egy olyan összeget előállítani, amelynek 19 tagja van és értéke a 2019 többszöröse. Egy lehetséges megoldás: $0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 16 + 17 + 1866 = \frac{17 \cdot 18}{2} + 1866 = 153 + 1866 = 2019$.

2. Egy játékkészletben egybevágó szabályos háromszöglapok szerepelnek. Az elemek az ábrán látható módon négy részre vannak osztva.



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

A csúcsokban levő szabályos háromszög alakú mezők oldalainak hossza 1, 2, 4, míg a teljes elem oldalhossza 8 egység. A háromszöglapok részei ki vannak színezve a piros, kék, zöld vagy sárga színek valamelyikére úgy, hogy minden lapon a négy rész négy különböző színnel van színezve. Ezenkívül a készletben lévő háromszöglapok között nincs két egyforma, de minden lehetséges színezésű szerepel.

A háromszöglapokból ki akarunk rakni egy olyan alakzatot, melyen a különböző színek területei egyenlőek. Meg tudjuk-e ezt csinálni úgy, hogy az alakzatunk

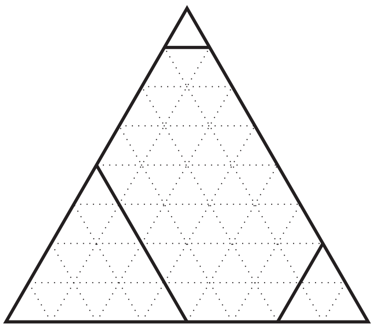
(a) pontosan 3 elemből álljon?

(b) pontosan 5 elemből álljon?

Megoldás

Legyen az egységnyi oldalú szabályos háromszög területe a területegységünk.

Felosztva a nagy háromszöget kisebbekre, megállapíthatjuk a részek területének arányát:



A sarkokban lévő háromszögek területe 1, 4 és 16, a középső hatszög területe pedig 43 egység.

(a) Színenként $\frac{3 \cdot 64}{4} = 48$ területegységnek kell összeállnia. Ez lehetséges:

$$(43, 4, 1, 16) + (1, 43, 4, 16) + (4, 1, 43, 16) = (48, 48, 48, 48)$$

(A területek összege szempontjából az nem is lényeges, hogy pontosan hogyan illesztettük össze az alakzatokat, csak az, hogy melyik eleme melyik tartománya milyen színű. A fenti jelölés úgy olvasandó, hogy a színek sorrendjét rögzítjük, és ebben a sorrendben írjuk le a színekhez tartozó területek nagyságát.)

(b) Nem lehetséges. Színenként $\frac{5 \cdot 64}{4} = 80$ terület egységnek kell összeállnia. Mindegyik alakzaton van egy 43 egység területű szín, és az öt alakzat közül legalább kettőn ugyanaz a szín lesz 43 egység területű. De $43 + 43 = 86 > 80$, ezért ilyen kirakás nem létezik

3. Az $A, Á, K, L, M, Ó, R, S, Z$ betűk mindegyike egy számjegyet jelöl 1-től 9-ig. (A különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek.) A következőket tudjuk:

- $S \cdot Z \cdot Á \cdot M = 180$,
- $L \cdot Á \cdot Z = 162$,
- $S < Z < Ó < R$, valamint
- $KAL + MÁR + LÁS + ZLÓ = 2019$.

Határozzátok meg, hogy melyik betűt mennyit ér!

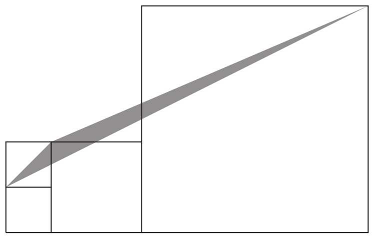
Megoldás

Egy lehetséges gondolatmenet:

- $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ és $162 = 2 \cdot 3^4$, tehát a $Z \cdot Á$ szorzatból csak két hármas tényező jöhet, így a második feltétel miatt csak $\boxed{L = 9}$ lehetséges, és $\{Á, Z\} = \{3, 6\}$.
- Most az első feltételből $S \cdot M = \frac{180}{3 \cdot 6} = 10$, így $\{S, M\} = \{2, 5\}$.
- Az utolsó feltételben a végződések összegét vizsgálva kapjuk, hogy $R + S + Ó$ 0-ra végződik. Az eddig „lefoglalt” jegyek miatt $\{Ó, R\} \subset \{1, 4, 7, 8\}$.
- Most elágazunk S lehetséges értékei alapján.
  - $\boxed{S = 5}$.
    Ekkor $\boxed{M = 2}$ és $Z > S$ miatt csak $\boxed{Z = 6}$ lehetséges. Most $S < Ó < R$ alapján csak $\boxed{Ó = 7}$ és $\boxed{R = 8}$ teljesülhet, továbbá Z választása miatt az maradt, hogy $\boxed{Á = 3}$. Az ismert értékeket visszaírva az utolsó feltételbe: $\overline{KA9} + 238 + 935 + 697 = 2019$, innen $\boxed{K = 1}$ és $\boxed{A = 4}$.
  - $\boxed{S = 2}$.
    Ekkor $R + Ó$ 8-ra végződik, de mivel 9-nél kisebb számjegyekről van szó, ezért $R + Ó = 8$. Viszont $Z \geq 3$ és $S < Z < Ó < R$ miatt $R + Ó \geq 5 + 4 = 9$, tehát ez az eset nem lehetséges.

  Azt kaptuk, hogy az egyetlen lehetséges megoldás: $A = 4, Á = 3, K = 1, L = 9, M = 2, Ó = 7, R = 8, S = 5, Z = 6$.

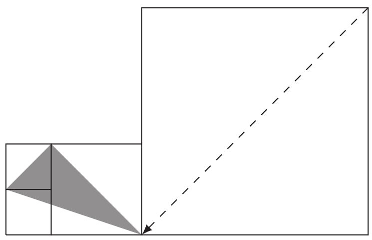
4. Négy négyzetből összeállítottuk az ábrán látható alakzatot. A bal szélen lévő kis négyzetek oldalhossza 3 egység, a tőlük jobbra lévőé 6 egység, a jobb szélső négyzet méretét nem ismerjük. Mekkora lehet a beszínezett háromszög területe?



Megoldás

Ha egy háromszög egyik csúcsát a szemközti oldallal párhuzamosan mozgatjuk, a háromszög területe nem változik, mert a szemközti oldal hossza, és az ahhoz tartozó magasság meghatározza a területet, és ezek az értékek nem változnak a mozgatás során.

Ez a gondolat felhasználható arra, hogy az ábra jobb felső sarkában lévő csúcsot egy olyan pozícióba mozgassuk, ahol kényelmesebben számolható a terület. Az ábrán látható négy négyzet „bal alsó – jobb felső" átlója párhuzamos (mindegyik 45 fokos szöget zár be a vízszintessel), ezért az alábbi háromszög területe egyenlő az eredeti háromszög területével:



A két legkisebb négyzet területe 9 egység, a mellettük lévő középső négyzet területe pedig 36 egység.

Az új háromszög területét megkapjuk, ha a $9+9+36=54$ egység területű befoglaló téglalapból levonjuk három derékszögű háromszög területét (bal felülről indulva és az óramutató járása szerint haladva):

$$T = 54 - \frac{9}{2} - \frac{36}{2} - \frac{3\cdot 9}{2} = 54 - 4{,}5 - 18 - 13{,}5 = 54 - 36 = 18.$$

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

5. Egy kör alakú asztalnál gyerekek ülnek. Két gyereket közelinek nevezünk, ha szomszédosak vagy ha csak egyetlen gyerek ül közöttük. A gyerekek szeretnének átülni úgy, hogy ha két gyerek eddig közeli volt, akkor az átrendezés után már ne legyenek közeliek. Lehetséges-e ez, ha

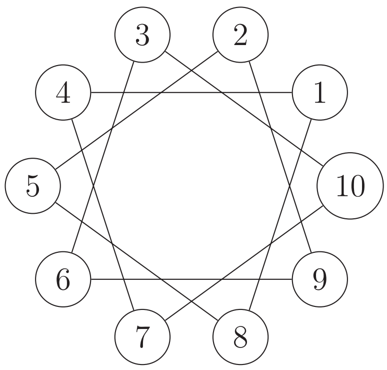
   (a) 10 gyerek

   (b) 9 gyerek

   ül az asztalnál?

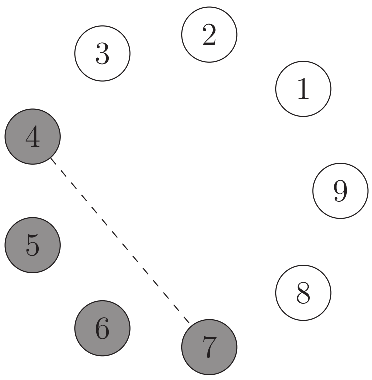
   Megoldás

   (a) Lehetséges. Jelöljük összekötéssel az átülés utáni sorrendet.



Látható, hogy a behúzott átlók nem közeli gyerekeket kötnek össze, és az összekötés szerinti másodszomszédos gyerekek sem voltak közeliek eredetileg.

(b) Nem lehetséges.



Az 1-hez nem közeli gyerekek a 4,5,6 és 7, tehát az átrendezés után közülük kettő-kettő kell, hogy 1 két oldalán üljön. De 4,5,6 és 7, között csak egy olyan pár van (4-7), akik eredetileg nem közeliek. Az átrendezés után viszont két szomszédos (tehát közeli) pár alakul ki e négy gyerek között, tehát ezek közül az egyik pár eredetileg közeli volt.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Kartal, Steller Gábor.
Lektorálta: Damásdi Gábor, Erben Péter.

Az NTP-TMV-18-0024. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

Nemzeti Tehetség Program
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Emberi Erőforrás Támogatáskezelő