TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

48. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap – 2019. május 24.

ÖTÖDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. A 2019 előállítható 10 darab 3-as számjegy, a négy alapművelet és zárójelek használatával. Például: $2019 = 333 \cdot (3+3) + 33 - 3 \cdot 3 - 3$.

   (a) Mutasd meg, hogy pontosan 9 darab 3-as számjeggyel is lehetséges ez.

   (b) Mutasd meg, hogy 9-nél kevesebb 3-as számjeggyel is lehetséges ez.

   Megoldás

   (a) $(333+3) \cdot (3+3) + 3 \cdot (3/3) = 336 \cdot 6 + 3 = 2016 + 3 = 2019$ (***4** pont*)

   (b) $(333+3) \cdot (3+3) + 3 = 336 \cdot 6 + 3 = 2016 + 3 = 2019$ (***3** pont*)

   Más helyes megoldásokra is jár a teljes pont. **Összesen: 7 pont**

2. Egy pozitív egész számot *szépséges*nek nevezünk, ha az elejéről, végéről, vagy mindkét irányból néhány számjegyet törölve éppen az eredeti szám számjegyei összegét kapjuk. (Például a 40, 3126, 333150 számok *szépséges*ek.) Hány háromjegyű *szépséges* szám van?

   Megoldás

   Öt eset van, aszerint, hogy melyik jegyeket vágtuk le az $\overline{abc}$ háromjegyű számból.

   (a) $\overline{ab}$: $a+b+c = 10a+b \Rightarrow c = 9a$, ezért csak $a=1, c=9$ lehetséges, b pedig tetszőleges (10 eset). (***2** pont*)

   (b) $\overline{bc}$: $a+b+c = 10b+c \Rightarrow a = 9b$, ezért csak $b=1, a=9$ lehetséges, c pedig tetszőleges (10 eset). (***2** pont*)

   (c) $\overline{a}$: $a+b+c = a \Rightarrow b=0, c=0$ és a tetszőleges pozitív számjegy (9 eset). (***1** pont*)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

(d) $\overline{b}$: $a+b+c=b \Rightarrow a=0, c=0$, ez nem lehetséges, mert a pozitív. (***1** pont*)

(e) $\overline{c}$: $a+b+c=c \Rightarrow a=0, b=0$, ez nem lehetséges, mert a pozitív. (***1** pont*)

Tehát összesen 29 szépséges háromjegyű szám van:

$109, 119, 129, 139, 149, 159, 169, 179, 189, 199$

$100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900$

$910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919$

Az indoklás nélküli helyes felsorolása a jó számoknak 3 pont érjen. **Összesen: 7 pont**

3. Töltsd ki az alábbi táblázatot úgy, hogy a 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44 számok mindegyike pontosan egyszer szerepeljen benne. A kitöltésre az is igaz legyen, hogy a számok tízes helyiértéken álló jegye mindegyik sorban és mindegyik oszlopban csupa különböző számból álljon, és ugyanez legyen igaz az egyes helyiértéken álló számjegyekre is. A táblázatba néhány számot előre beírtunk, valamint tudjuk, hogy az x helyére páros szám jön.

Elegendő egy jó kitöltést megadni, nincs szükség indoklásra!

	41		
x			32
13			

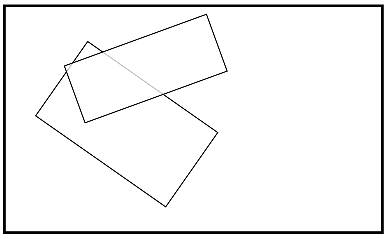
Megoldás

22	41	33	14
44	23	11	32
13	34	42	21
31	12	24	43

26 számjegy hiányzik a táblázatból: 0-1 helyes számjegy 0 pont, 2-5 helyes 1, 6-9 helyes 2, 10-13 helyes 3, 14-17 helyes 4, 18-21 helyes 5, 22-25 helyes 6, 26 helyes 7 pont.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

4. Egy téglalap alakú szobában két szőnyeg hever úgy, hogy egy kis részük egymásra lóg. A mindkét szőnyeg által fedett terület a kisebb szőnyegnek 1/3-a, a nagyobbnak 1/4-e, a teljes szobának pedig 3/28 része. A szoba mekkora részét nem fedi egyetlen szőnyeg sem?



1. megoldás

Ha a mindkét szőnyeg által fedet terület t, akkor a kis szőnyeg területe $3t$, a nagyé $4t$. (***1** pont*)

A két szőnyeg által együttesen fedett terület $3t + 4t - t = 6t$, mert a közösen fedett részt csak egyszer kell számolni. (***2** pont*)

A teljes szoba területe $\frac{28}{3}t$ (***1** pont*)

A fedetlen rész $\frac{28}{3}t - 6t = \frac{10}{3}t$. (***1** pont*)

Ez a szoba $\frac{10}{28} = \frac{5}{14}$ része. (***2** pont*)

Összesen: 7 pont

2. megoldás

A kis szőnyeg 1/3-a a szoba 3/28-a. Vagyis a kis szőnyeg a szoba 9/28-a. (***2** pont*)

A nagy szőnyeg 1/4-e, a szoba 3/28-a. Vagyis a kis szőnyeg a szoba 12/28-a. (***2** pont*)

A közösön fedett rész: $9/28 + 12/28 - 3/28 = 18/28$ (***2** pont*)

Vagyis a fedetlen rész területe: $1 - 18/28 = 10/28$ (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

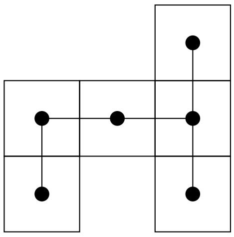
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

5. Hexominóknak nevezzük azokat a sokszögeket, amelyeket megkaphatunk úgy, hogy hat darab egységnyi oldalhosszúságú négyzetet összeillesztünk az oldalaiknál fogva. Hány olyan hexominó van, aminek 12 egység a kerülete? (A forgatással és tükrözéssel egymásba vihető hexominókat azonosnak tekintjük.)

Megoldás

Hat különálló egységnégyzet kerületének összege 24 egység. Amikor két négyzetet egy élük mentén összeillesztünk, akkor az illesztés kettővel csökkenti az összesített kerületet (mert az illesztés a kapott alakzat belsejébe kerül). Ahhoz, hogy végül 12 egység kerületű síkidomot kapjunk, hat él-él illeszkedésnek kell lennie.

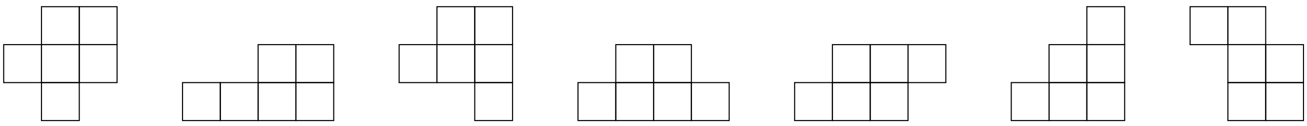
Ha van egy négyzetekből összerakott alakzatunk, akkor képezhetjük annak „vázát” a következő módon: jelöljük meg a négyzetek középpontját egy-egy kis körrel, és ezek közül kössük össze azokat, amelyek élszomszédos négyzetek középpontját jelölik. Ha az így kapott vázban nincs „kör”, akkor pontosan öt összekötés van benne, ezért a kerület $24 - 10 = 14$, ami túl sok. (***1** pont*)



Könnyen látható, hogy csak azon vázak tartalmaznak kört, amelyek olyan alakzathoz tartoznak, amelyben van egy kétszer kettes négyzet. (***1** pont*)

Az összes megoldás felsorolásához ezért csak azokat az eseteket kell végignézni, amikor egy kétszer kettes négyzethez még két egységnégyzetet ragasztottunk.

A megoldások:



1-2 jó konstrukcióért 1 pont, 3-4 konstrukció 2 pont, 5 konstrukció 3 pont, 6 konstrukció 4 pont, 7 konstrukció 5 pont. (***5** pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Kartal, Steller Gábor.
Lektorálta: Damásdi Gábor, Erben Péter.
Az NTP-TMV-18-0024. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.