TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

48. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap – 2019. május 25.

HETEDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Egy tizenegy tagú baráti társaság egy furcsa étterembe ment ebédelni. Egy olyan kerekasztal köré ültetik le őket, ahol a székek 1-től 11-ig számozottak. Az ebéd végén mindenkinek annyiszor 1000 forintot kell fizetni, amennyi a két szomszédja sorszámának különbsége. A székeket a pincér rendezheti el a társaság érkezése előtt. Mit tegyen a lehető legnagyobb számla elérése érdekében?

1. megoldás

Jelöljük valamilyen körüljárás szerint a székek sorszámát betűkkel: $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$. a és b különbsége $a-b$-vel vagy $b-a$-val egyenlő, ez elmondható a többi különbségről is. Ha összeadjuk a 10 különbséget, és elvégezzük az összevonásokat, $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$ mindegyike -2-szer, 0-szor vagy 2-szer fog szerepelni az összegben. (***1** pont*)

Azt is vegyük észre, hogy az együtthatók összege 0. Valóban, ha $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ mindegyikének értéke 1 lenne, a kapott kifejezés akkor is helyesen adja meg a különbségek összegét (hiszen $a-b$ és $b-a$ is 0), ami 0, másrészt viszont pont az együtthatók összegét kapjuk meg. Ez azt jelenti, hogy ugyanannyi 2, mint -2 lesz az együtthatók között. (***2** pont*)

Ha van legalább két 0 az együtthatók között, akkor a nagyobb sorszám együtthatóját 2-re, a kisebbét -2-re változtatom, és ezzel növeltem az összeget a két sorszám különbségének kétszeresével. Ezért innentől azokat az eseteket vizsgáljuk, amikor az együtthatók között pontosan egy 0 van (páratlan a 0-k száma). (***1** pont*)

Ha a 7, 8, 9, 10, 11 sorszámok együtthatója között van -2, akkor az 1, 2, 3, 4, 5, 6 sorszámok együtthatója között van 2 (hiszen öt 2 és öt -2 együttható szerepel. Ha most ezt a két együtthatót kicserélem, akkor növeltem az összeget a két sorszám különbségének négyszeresével. (***1** pont*)

Végül ha ezek után nem a 6-os sorszám együtthatója a 0, hanem az 1, 2, 3, 4, 5 sorszámok valamelyikének együtthatója, akkor ezt a 0-t kicserélem a 6 együtthatójával, és így növelem az összeget a két sorszám különbségének duplájával. (***1** pont*)

Mivel csak véges sok kombináció lehetséges, így tényleg van olyan eset, amikor az összeg a lehető legnagyobb, és az előzőek alapján ez nem lehet más, mint a $2(11+10+9+8+7)-2(5+4+3+2+1)=60$ eset. (***1** pont*)

Ez meg is valósítható, például a 11, 8, 1, 4, 10, 7, 2, 5, 9, 6, 3 sorrenddel. (***1** pont*)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

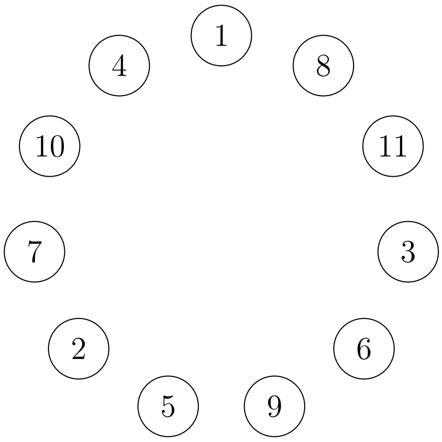
2. Megoldás

A pincér célja, hogy a különbségek összege a lehető legnagyobb legyen. Tekinthetünk erre 22 tagú összegként, amelyben a sorszámok mindegyike pontosan két alkalommal szerepel pozitív vagy negatív előjellel úgy, hogy összesen 11 db pozitív és 11 db negatív előjelet osztunk ki. (***2** pont*)
A legnagyobb ilyen összeget akkor kapjuk, ha a 11 legnagyobb abszolút értékű szám kap pozitív, a többi negatív előjelet. Ekkor az összeg

$$11+11+10+10+9+9+8+8+7+7+6-6-5-5-4-4-3-3-2-2-1-1=60.$$

(***2** pont*)

Lehetséges olyan ültetés, amely esetén a számla 60000 forint lesz, például így:



A különbségek összege:

$$(8-4)+(11-1)+(8-3)+(11-6)+(9-3)+(6-5)+(9-2)+(7-5)+(10-2)+(7-4)+(10-1)=60.$$

(***3** pont*)
Összesen: 7 pont

2. Dani digitális órája `13:24`-et mutat. Ez azon ritka percek egyike, amikor az órán négy egymás utáni számjegy látható.
   (a) Hány ilyen perc van egy nap folyamán?
   (b) Legfeljebb mennyi idő telik el két egymást követő ilyen állás között?

   (A digitális órán mindig négy számjegy látható és 24 órás formátumot használ, pl.: `00:41` vagy `21:29`.)

Megoldás

Az órában a tízesek helyén csak 0, 1 vagy 2 állhat, ezért a négy szomszédos jegy közül a legkisebb nem nagyobb kettőnél. (***1** pont*)

Ha a jegyek $0, 1, 2$ és 3, akkor az órák helyén 01, 02, 03, 10, 12, 13, 20, 21 és 23 állhat, és a percekre maradt jegyek sorrendje tetszőleges. Ez $9 \cdot 2 = 18$ lehetőség. (***1** pont*)

Ha a jegyek $1, 2, 3$ és 4, akkor az órák helyén 12, 13, 14, 21, 23 állhat, és a percekre maradt jegyek sorrendje tetszőleges. Ez $5 \cdot 2 = 10$ lehetőség. (***1** pont*)

Ha a jegyek $2, 3, 4$ és 5, akkor az órák helyén csak 23 állhat, és a percekre maradt jegyek sorrendje tetszőleges. Ez 2 lehetőség. (***1** pont*)

Tehát összesen $18 + 10 + 2 = 30$ olyan perc van a nap folyamán, amikor teljesülnek a feltételek. (***1** pont*)

A `03:21` és `10:23` egymást követő állások között 7 óra és 2 perc (422 perc) telik el. (***1** pont*)

Ennél nagyobb különbség nincs, hiszen az órák lehetséges értékeit (01, 02, 03, 10, 12, 13, 14, 20, 21, 23) vizsgálva látható, hogy sehol máshol nincs 6-nál nagyobb eltérés, így az időpontok között máskor nem lehet 7 óránál nagyobb különbség. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

3. Egy 5×5-ös táblázat minden mezőjére egy-egy pozitív egész számot írtunk (lehetnek közöttük egyenlők). Kiszámoltuk minden sorban és minden oszlopban a számok összegét. Ez a 10 összeg csupa különböző pozitív egész. Mennyi a táblázatban szereplő 25 szám összege, ha az a lehető legkisebb?

Megoldás

Mivel mindegyik sor- és oszlopösszeg legalább 5, és ezek különböző pozitív egészek, ezért összegük legalább

$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 95.$$

(***2** pont*)

A sorösszegek és oszlopösszegek összege a 25 szám összegének duplája, ezért csak páros szám lehet. A fentiek miatt ez legalább 96, így a 25 szám összege legalább 48. (***2** pont*)

A 48-as összeg el is érhető, például így:

1	1	1	1	2
1	1	1	2	2
1	2	2	2	3
1	2	2	3	4
1	2	3	3	4

A sorösszegek itt: 6, 7, 10, 12, 13; az oszlopösszegek: 5, 8, 9, 11, 15. (***3** pont*)

Összesen: 7 pont

4. Nevezzük egy háromszög valamely oldalát *kurt*ának, ha nem hosszabb a hozzá tartozó magasságnál. Legfeljebb hány *kurta* oldala lehet egy háromszögnek?

Megoldás

Kettő lehet, például az egyenlőszárú derékszögű háromszög mindkét befogója egyenlő a hozzá tartozó magassággal (de az átfogó hosszabb, mint az átfogóhoz tartozó magasság). (***2** pont*)
Bebizonyítjuk, hogy három kurta oldal nem lehet egy háromszögben. Legyen c a háromszög (valamelyik) leghosszabb oldala, a másik kettő a és b. A szemközti csúcsot a c oldal egyenesével összekötő szakaszok közül az m_c magasságnál nincs rövidebb, ezért $m_c \leq a$ és $m_c \leq b$. (***2** pont*)
Ha a c oldal kurta lenne, akkor $c \leq m_c$ teljesülne. Ekkor $c \leq a$ és $c \leq b$ is igaz lenne. (***1** pont*)
De c a leghosszabb oldal, így ebből az következik, hogy mind a három oldal egyenlő, továbbá m_c is egyenlő velük. Ez ellentmondás, hiszen a szabályos háromszögben a magasság rövidebb az oldalhossznál. (***1** pont*)
Tehát a leghosszabb oldal sosem lehet kurta, így legfeljebb két kurta oldal lehetséges. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Nagy Kartal, Steller Gábor.
Lektorálta: Damásdi Gábor, Erben Péter.
Az NTP-TMV-18-0024. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.