TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

49. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló – 2020. szeptember 25.

ÖTÖDIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Anna összeadta 1-től 17-ig a pozitív egész számokat. Bella összeadta 7-től 23-ig a pozitív egész számokat. Mennyivel nagyobb Bella összege, mint Anna összege?

   Megoldás. Anna és Bella is 17 darab számot adott össze. Bella összeadásában mindegyik szám 6-tal nagyobb, mint a megfelelő szám Anna összeadásában. Ezért Bella összege $17 \cdot 6 = 102$-vel nagyobb Anna összegénél.

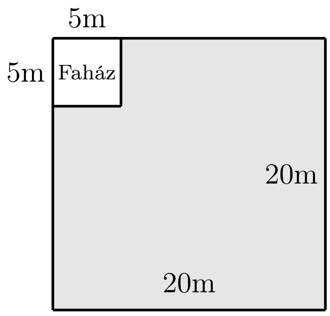
   2. megoldás. $1 + 2 + \ldots + 17 = 153$ és $7 + 8 + \ldots + 23 = 255$, így a különbség: $255 - 153 = 102$.

2. Juss el a 777-ről a 666-ra úgy, hogy minden lépésben az éppen aktuális számból kivonod a számban szereplő egyik jegyet.
   (Például a 183-as számról a $183 - 1 = 182$-re, a $183 - 8 = 175$-re és a $183 - 3 = 180$-ra lehet egy lépésben eljutni.)

   Megoldás. Egy lehetőség:

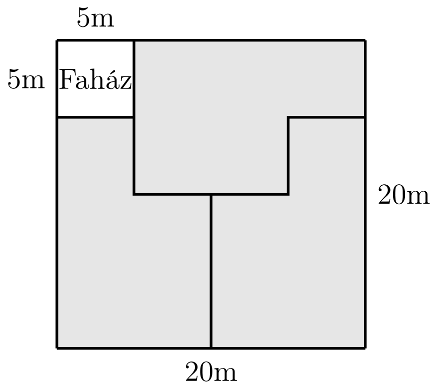
$$777 \xrightarrow{-7} 770 \xrightarrow{-7} \ldots \xrightarrow{-7} 700 \xrightarrow{-7} 693 \xrightarrow{-3} 690 \xrightarrow{-6} 684 \xrightarrow{-6} 678 \xrightarrow{-6} 672 \xrightarrow{-6} 666$$

3. Három fiú örököl egy 20 méter oldalú négyzet alakú telket, melynek egyik sarkában egy faház áll, amelynek alapja egy 5 méter oldalhosszúságú négyzet. A telek többi részén szántóföld van. A fiúk fel akarják osztani a szántóföldet úgy, hogy mindegyikük egy-egy ugyanakkora területű és ugyanolyan alakú összefüggő részt kapjon. Mutass példát egy ilyen felosztásra.

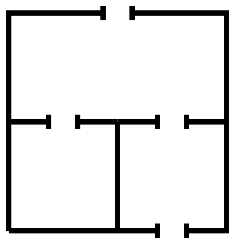


TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Megoldás



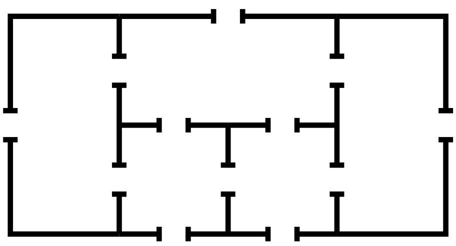
4. Egy egyszintes lakásról a következőket tudjuk.
– A lakás és a szobák alaprajza téglalap alakú.
– Bármely két szoba között legfeljebb egy ajtó van.
– Bármely szobából legfeljebb egy ajtó nyílik a lakáson kívülre.
– A lakásban összesen 12 ajtó van.
(Az ábra egy 3-szobás 4-ajtós lakásra mutat példát).



Legkevesebb hány szoba lehet a lakásban? Rajzolj példát és indokold, hogy miért nem elég kevesebb szoba.

Megoldás. Ha a lakásban legfeljebb négy szoba lenne, akkor a lakáson kívülre legfeljebb 4 ajtó vezetne, a lakáson belül pedig legfeljebb $4 \cdot 3/2 = 6$ ajtó lehetne, ez összesen legfeljebb csak 10 ajtó.

Öt szobával megoldható:



5. Egy négycsapatos focibajnokságban mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. Győzelemért 3, döntetlenért 1, vereségért pedig 0 pont járt. A bajnokság végén megkérdeztünk három csapatot, hogy hány pontot értek el. A válaszok a következők voltak: 1, 3 és 7. Hány pontot szerezhetett a negyedik csapat?

Megoldás. Biztos, hogy a 7 pontos csapat kétszer nyert, egyszer döntetlent játszott, míg az 1 pontos csapat egyszer döntetlen játszott és kétszer veszített. (Máshogyan nem lehet szerezni 7, illetve 1 pontot.)

A 3 pontos csapat kétféleképpen gyűjthette össze pontjait:

(1) három döntetlent játszott,

(2) egyszer nyert és kétszer veszített.

Az (1) esetben az 1 pontos és a 7 pontos csapat is a 3 pontossal jászotta egyetlen döntetlenjét. Következésképpen, a negyedik csapat legyőzte az 1 pontosat és kikapott a 7 pontostól, így összesen 4 pontot gyűjtött.

A (2) esetben a 3 pontos csapat az 1 pontosat legyőzte, míg a 7 pontostól kikapott (hiszen nem játszott döntetlent). Így a negyedik csapat ellen kellett a másik vereseégét elszenvednie. Az 1 pontos és a 7 pontos csapat mérkőzése kétféleképpen érhetett véget:

(2a) a 7 pontos csapat legyőzte az 1 pontosat,

(2b) döntetlen.

A (2a) esetben 7 pontos és az 1 pontos csapat is a negyedik csapat ellen játszotta az egyetlen döntetlenjét. Így ekkor a negyedik csapat 5 pontot gyűjtött.

A (2b) esetben a negyedik csapat is legyőzte az 1 pontosat, és kikapott a 7 pontostól. Ekkor tehát a negyedik csapat 6 pontot gyűjtött.

Ezzel minden lehetőséget megvizsgáltunk, a negyedik csapat 4, 5 vagy 6 pontot gyűjthetett.

A megoldás során mindhárom esetben megadtuk mind a hat meccs kimenetelét, könnyen ellenőrizhető, hogy ezek tényleg a kívánt pontszámokat szolgáltatják.

Megjegyzés: Mindhárom eset megvalósulására hozható példa az elmúlt évtized kontinentális labdarúgó-bajnokságaiból.

Példa 6 pontos negyedik csapatra: a 2016-os Európa-bajnokság D csoportja.

	CRO	ESP	TUR	CZE	Gy	D	V	Gk	**P**
Horvátország (CRO)	–	2-1	1-0	2-2	2	1	0	+2	**7**
Spanyolország (ESP)	1-2	–	3-0	1-0	2	0	1	+3	**6**
Törökország (TUR)	0-1	0-3	–	2-0	1	0	2	−2	**3**
Csehország (CZE)	2-2	0-1	0-2	–	0	1	2	−3	**1**

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Példa 5 pontos negyedik csapatra: a 2016-os Európa-bajnokság A csoportja.

	FRA	SUI	ALB	ROM	Gy	D	V	Gk	**P**
Franciaország (FRA)	–	0-0	2-0	2-1	2	1	0	+3	**7**
Svájc (SUI)	0-0	–	1-0	1-1	1	2	0	+1	**5**
Albánia (ALB)	0-2	0-1	–	1-0	1	0	2	−2	**3**
Románia (ROM)	1-2	1-1	0-1	–	0	1	2	−2	**1**

Példa 4 pontos negyedik csapatra: a 2013-as Afrikai nemzetek kupája B csoportja.

	GHA	MAL	COD	NIG	Gy	D	V	Gk	**P**
Ghána (GHA)	–	1-0	2-2	3-0	2	1	0	+4	**7**
Mali (MAL)	0-1	–	1-1	1-0	1	1	1	0	**4**
Kongói DK (COD)	2-2	1-1	–	0-0	0	3	0	0	**3**
Niger (NIG)	0-3	0-1	0-0	–	0	1	2	−4	**1**

2. megoldás: A 4 csapat összesen 6 mérkőzést játszott le. Ha egy meccs eldőlt (azaz valamelyik csapat győzelmével ért véget), akkor 3 pontot osztottak ki a meccset vívó két csapatnak összesen. Ha viszont egy meccs döntetlennel ért véget, akkor 2 pontot osztottak ki a meccset vívó két csapatnak összesen. Így ha az eldőlt meccsek számának háromszorosához hozzáadjuk a döntetlenek számának kétszeresét, akkor megkaptjuk a négy csapatnak összesen kiosztott pontok számát.

A 7 pontos csapatnak két győzelme és egy döntetlenje van. Így legalább egy meccs döntetlen lett. Az 1 pontos csapatnak van két veresége, melyek közül az egyiket nem a 7 pontostól szenvedte el, így a 7 pontos győzelmeivel együtt legalább 3 meccs eldőlt. Tehát a következő esetek valamelyike áll fenn:

- 5 eldőlt és 1 döntetlen meccs. Ekkor összesen $5 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 17$ pont került kiosztásra, így a negyedik csapatnak $17 - (1 + 3 + 7) = 6$ pontja van.
- 4 eldőlt és 2 döntetlen meccs. Ekkor összesen $4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 16$ pont került kiosztásra, így a negyedik csapatnak $16 - (1 + 3 + 7) = 5$ pontja van.
- 3 eldőlt és 3 döntetlen meccs. Ekkor összesen $3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 15$ pont került kiosztásra, így a negyedik csapatnak $15 - (1 + 3 + 7) = 4$ pontja van.

Ezen esetek mindegyikére megadható konstrukció, például a fenti megjegyzésben látható módon.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Hujter Bálint, Nagy Kartal, Sándor András.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

Az NTP-TMV-19-0019. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma és a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.