TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

49. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló – 2020. szeptember 25.

HATODIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Juss el a 888-ról a 777-re úgy, hogy minden lépésben az éppen aktuális számból kivonod a számban szereplő egyik jegyet.
(Például a 183-as számról a $183 - 1 = 182$-re, a $183 - 8 = 175$-re és a $183 - 3 = 180$-ra lehet egy lépésben eljutni.)

Megoldás. Két gondolat segíthet a megfelelő lépéssorozat megtalálásában.

- Az aktuális szám első jegye ritkán változik, azért azt kényelmes sokszor használni. Ha ez az első jegy mondjuk 8, akkor ismételten levonva nem változik a 8-cal való osztási maradék.
- Megpróbálhatunk a 777-ből visszafelé elindulni, feltételezve, hogy többnyire 7-et vontunk le, és megnézhetjük, hol kellene átlépni a 800-asokról a 700-asokra.

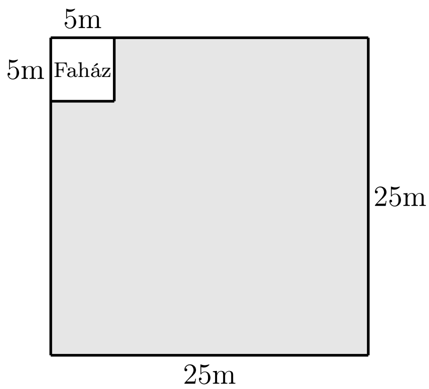
Az utolsó lépések mondjuk így nézhetnek ki: $\ldots \to 806 \xrightarrow{-8} 798 \xrightarrow{-7} 791 \xrightarrow{-7} 784 \xrightarrow{-7} 777$.

A 806 kettővel hat maradékot ad 8-cal osztva, ellenben 888 nullát, tehát nem lehet csak 8-akat levonva eljutni abba. De ha beiktatunk két eggyel való csökkentést is, akkor már megy a dolog.

$$888 \xrightarrow{-8} 880 \xrightarrow{-8} 872 \xrightarrow{-8} \ldots \xrightarrow{-8} 816 \xrightarrow{-1} 815 \xrightarrow{-1} 814 \xrightarrow{-8} 806$$

A két sorozatunkat egymás után fűzve megkaptuk a feladat egy lehetséges megoldását.

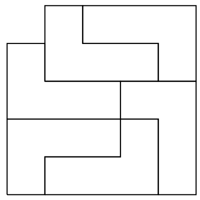
2. Hat fiú örököl egy 25 méter oldalú négyzet alakú telket, melynek egyik sarkában egy faház áll, amelynek alapja egy 5 méter oldalhosszúságú négyzet. A telek többi részén szántóföld van.
A fiúk fel akarják osztani a szántóföldet úgy, hogy mindegyikük egy-egy ugyanakkora területű és ugyanolyan alakú, összefüggő részt kapjon, de furfangos édesapjuk kikötötte, hogy a részek nem lehetnek téglalap alakúak.
Mutass példát egy ilyen felosztásra.



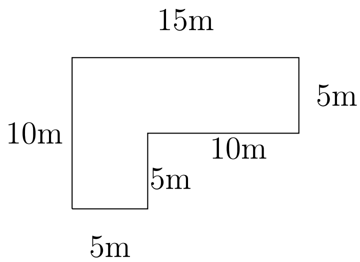
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Megoldás. Egyszerűsíti a munkát, ha egy 5×5-ös négyzetrácson gondolkozunk, ahol minden rácsnégyzet egy 5 méter oldalhosszúságú négyzetnek felel meg a valóságban. Így $5^2 - 1 = 24$ rácsnégyzetet kell a hat testvér között felosztani.

Egy lehetséges megoldás:



Megjegyzés. Akkor is jár a 7 pont, ha a versenyző az eredeti méreteket használva ad egy jó felosztást, anélkül, hogy átfogalmazná a kérdést 5×5-ös négyzetrácsra. A fenti megoldásban egy rész méretei ekkor:



3. Egy pozitív egész számot *6-almas*nak nevezünk, ha csupa különböző számjegyből áll, minden számjegye legalább 6, és a szám osztható 6-tal. Hány 6-almas szám van?

   Megoldás. A lehetséges számjegyek a $\{6, 7, 8, 9\}$ halmaz elemei, ezért legfeljebb négyjegyű számok jöhetnek szóba.

   Azt is tudjuk, hogy a 6-almas számok párosak és hárommal oszthatók.

   A számjegyek száma szerint válogatjuk szét az eseteket.

   - **1 jegy**: Csak a 6 jó, ez 1 eset.
   - **2 jegy**: A lehetséges végződés 6 vagy 8, mindegyikhez egy kezdő jegy jó a 3-mal való oszthatóság miatt. A 78 és a 96 6-almas, ez 2 eset.
   - **3 jegy**: A 3-mal való oszthatóság miatt vagy a 6 vagy a 9 a „kimaradó” számjegy. (A kimaradót itt úgy értjük, hogy a $\{6, 7, 8, 9\}$ halmaz három elemét használjuk, egyet nem.) Utána csak arra kell ügyelni, hogy az egyesek helyén páros jegy álljon, a többi jegy sorrendje tetszőleges. Most a 6-almas számok a következők: 798, 978, 786, 876, 768, 678, ez 6 eset.

- **4 jegy**: Mivel $6 + 7 + 8 + 9 = 30$ osztható hárommal, ezért csak annyi a megkötés, hogy az egyesek helyére páros jegy kerüljön, amúgy tetszőleges a négy számjegy sorrendje. Ez $2 \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12$ eset, mert két páros jegy közül választhatunk, és a maradék három jegy hatféle sorrendbe írható, hiszen különböznek.

Összesen $1 + 2 + 6 + 12 = 21$ db 6-almas szám van.

4. Egy négycsapatos focibajnokságban mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott.
Győzelemért 3, döntetlenért 1, vereségért pedig 0 pont járt. A bajnokság végén megkérdeztünk három csapatot, hogy hány pontot értek el. A válaszok a következők voltak: 1, 3 és 7.
Hány pontot szerezhetett a negyedik csapat?

Megoldás. Biztos, hogy a 7 pontos csapat kétszer nyert, egyszer döntetlent játszott,
míg az 1 pontos csapat egyszer döntetlen játszott és kétszer veszített.
(Máshogyan nem lehet szerezni 7, illetve 1 pontot.)

A 3 pontos csapat kétféleképpen gyűjthette össze pontjait:

(1) három döntetlent játszott,

(2) egyszer nyert és kétszer veszített.

Az (1) esetben az 1 pontos és a 7 pontos csapat is a 3 pontossal jászotta egyetlen döntetlenjét. Következésképpen, a negyedik csapat legyőzte az 1 pontosat és kikapott a 7 pontostól, így összesen 4 pontot gyűjtött.

A (2) esetben a 3 pontos csapat az 1 pontosat legyőzte, míg a 7 pontostól kikapott (hiszen nem játszott döntetlent). Így a negyedik csapat ellen kellett a másik vereseégét elszenvednie. Az 1 pontos és a 7 pontos csapat mérkőzése kétféleképpen érhetett véget:

(2a) a 7 pontos csapat legyőzte az 1 pontosat,

(2b) döntetlen.

A (2a) esetben 7 pontos és az 1 pontos csapat is a negyedik csapat ellen játszotta az egyetlen döntetlenjét. Így ekkor a negyedik csapat 5 pontot gyűjtött.

A (2b) esetben a negyedik csapat is legyőzte az 1 pontosat, és kikapott a 7 pontostól. Ekkor tehát a negyedik csapat 6 pontot gyűjtött.

Ezzel minden lehetőséget megvizsgáltunk, a negyedik csapat 4, 5 vagy 6 pontot gyűjthetett.

A megoldás során mindhárom esetben megadtuk mind a hat meccs kimenetelét, könnyen ellenőrizhető, hogy ezek tényleg a kívánt pontszámokat szolgáltatják.

Megjegyzés: Mindhárom eset megvalósulására hozható példa az elmúlt évtized kontinentális labdarúgó-bajnokságaiból.

Példa 6 pontos negyedik csapatra: a 2016-os Európa-bajnokság D csoportja.

	CRO	ESP	TUR	CZE	Gy	D	V	Gk	**P**
Horvátország (CRO)	–	2-1	1-0	2-2	2	1	0	+2	**7**
Spanyolország (ESP)	1-2	–	3-0	1-0	2	0	1	+3	**6**
Törökország (TUR)	0-1	0-3	–	2-0	1	0	2	−2	**3**
Csehország (CZE)	2-2	0-1	0-2	–	0	1	2	−3	**1**

Példa 5 pontos negyedik csapatra: a 2016-os Európa-bajnokság A csoportja.

	FRA	SUI	ALB	ROM	Gy	D	V	Gk	**P**
Franciaország (FRA)	–	0-0	2-0	2-1	2	1	0	+3	**7**
Svájc (SUI)	0-0	–	1-0	1-1	1	2	0	+1	**5**
Albánia (ALB)	0-2	0-1	–	1-0	1	0	2	−2	**3**
Románia (ROM)	1-2	1-1	0-1	–	0	1	2	−2	**1**

Példa 4 pontos negyedik csapatra: a 2013-as Afrikai nemzetek kupája B csoportja.

	GHA	MAL	COD	NIG	Gy	D	V	Gk	**P**
Ghána (GHA)	–	1-0	2-2	3-0	2	1	0	+4	**7**
Mali (MAL)	0-1	–	1-1	1-0	1	1	1	0	**4**
Kongói DK (COD)	2-2	1-1	–	0-0	0	3	0	0	**3**
Niger (NIG)	0-3	0-1	0-0	–	0	1	2	−4	**1**

2. megoldás: A 4 csapat összesen 6 mérkőzést játszott le. Ha egy meccs eldőlt (azaz valamelyik csapat győzelmével ért véget), akkor 3 pontot osztottak ki a meccset vívó két csapatnak összesen. Ha viszont egy meccs döntetlennel ért véget, akkor 2 pontot osztottak ki a meccset vívó két csapatnak összesen. Így ha az eldőlt meccsek számának háromszorosához hozzáadjuk a döntetlenek számának kétszeresét, akkor megkaptjuk a négy csapatnak összesen kiosztott pontok számát.

A 7 pontos csapatnak két győzelme és egy döntetlenje van. Így legalább egy meccs döntetlen lett. Az 1 pontos csapatnak van két veresége, melyek közül az egyiket nem a 7 pontostól szenvedte el, így a 7 pontos győzelmeivel együtt legalább 3 meccs eldőlt. Tehát a következő esetek valamelyike áll fenn:

- 5 eldőlt és 1 döntetlen meccs. Ekkor összesen $5 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 17$ pont került kiosztásra, így a negyedik csapatnak $17 - (1 + 3 + 7) = 6$ pontja van.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

- 4 eldőlt és 2 döntetlen meccs. Ekkor összesen $4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 16$ pont került kiosztásra, így a negyedik csapatnak $16 - (1 + 3 + 7) = 5$ pontja van.
- 3 eldőlt és 3 döntetlen meccs. Ekkor összesen $3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 15$ pont került kiosztásra, így a negyedik csapatnak $15 - (1 + 3 + 7) = 4$ pontja van.

Ezen esetek mindegyikére megadható konstrukció, például a fenti megjegyzésben látható módon.

5. Egy 4×4-es táblázat sorait és oszlopait is megszámoztuk 1-től 4-ig. Ezután pöttyöket tettünk néhány mezőbe (egy mezőbe akár többet is) úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban összesen pontosan annyi pötty legyen, mint amennyi az adott sor, illetve oszlop sorszáma.
Hány mező maradhatott üresen? Adj példát minden lehetséges értékre, és indokold meg, hogy más érték miért nem lehetséges.

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

Megoldás. Minden sorban van pötty, hiszen minden sorban pozitív az összeg. Ezért legalább négy mezőn kell legyen pötty, azaz legfeljebb tizenkét mező lehet üres.

Soronként összeszámolva azt kapjuk, hogy hogy összesen $1+2+3+4 = 10$ pöttyöt kell elhelyezni a táblázat mezőin.

Ezért legfeljebb tíz mezőre juthat pötty, azaz legalább 6 mező üres.

Tehát az üres mezők száma legalább hat és legfeljebb tizenkettő. Ezen határok között mindegyik eset lehetséges, amint az alábbi példák mutatják.

A példákban pöttyöket nem rajzoltunk, ehelyett beírtuk az egyes mezőkbe, hogy hány pöttyöt tennénk oda.

1			
	2		
		3	
			4

(12 üres mező)

	1		
1	1		
		3	
			4

(11 üres mező)

		1	
1		1	
	2	1	
			4

(10 üres mező)

		1	
	1	1	
1	1	1	
			4

(9 üres mező)

			1
1			1
		2	1
	2	1	1

(8 üres mező)

			1
1			1
	1	1	1
	1	2	1

(7 üres mező)

			1
		1	1
	1	1	1
1	1	1	1

(6 üres mező)

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Hujter Bálint, Nagy Kartal, Sándor András.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

Az NTP-TMV-19-0019. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma és a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.

Nemzeti Tehetség Program
Nemzeti Kulturális Alap
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Emberi Erőforrás Támogatáskezelő