TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

49. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló – 2020. szeptember 25.

NYOLCADIK OSZTÁLY

MEGOLDÁSOK

1. Hány olyan 2020-nál kisebb pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek szorzata 20?

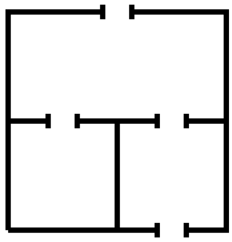
   Megoldás Fel kell bontanunk a 20-at legfeljebb négy darab egyjegyű szám szorzatára. Ha négy tényezőt használunk, akkor legalább az egyiknek egynek kell lennie, különben nem tudnánk 2020-nál kisebb négyjegyű számot összeállítani a számokból. Azt is láthatjuk, hogy a négyjegyű megoldásoknak 1-essel kell kezdődnie.

   Soroljuk fel a lehetséges felbontásokat, felhasználva, hogy $20 = 2^2 \cdot 5$:

   - $20 = 5 \cdot 4$, a lehetséges számok: 45, 54
   - $20 = 5 \cdot 4 \cdot 1$, a lehetséges számok: 145, 154, 415, 451, 514, 541
   - $20 = 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1$, a lehetséges számok: 1145, 1154, 1415, 1451, 1514, 1541
   - $20 = 5 \cdot 2 \cdot 2$, a lehetséges számok: 225, 252, 522
   - $20 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$, a lehetséges számok: 1225, 1252, 1522

   Összesen 20 pozitív egész felel meg a feladat feltételeinek.

2. Egy egyszintes lakásról a következőket tudjuk.
   – A lakás és a szobák alaprajza téglalap alakú.
   – Bármely két szoba között legfeljebb egy ajtó van.
   – Bármely szobából legfeljebb egy ajtó nyílik a lakáson kívülre.
   – A lakásban összesen 15 ajtó van.
   (Az ábrán egy 3-szobás 4-ajtós lakásra látható példa.)

   Legkevesebb hány szoba lehet a lakásban? Rajzolj példát és indokold, hogy miért nem elég kevesebb szoba.

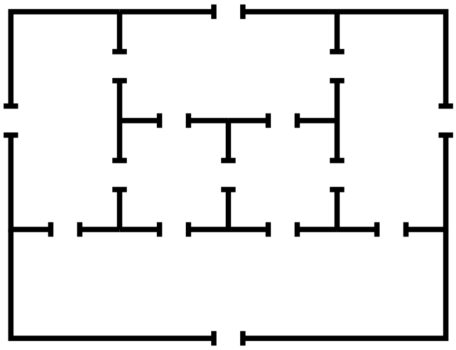
   Megoldás. Ha a lakásban legfeljebb négy szoba lenne, akkor a lakáson kívülre legfeljebb 4 ajtó vezetne. A lakáson belül az ajtók két szobához tartoznak, két szobát pedig legfeljebb $4 \cdot 3/2 = 6$ féle módon lehet kiválasztani, azaz az ajtók száma legfeljebb 6. Ez összesen legfeljebb 10 ajtó.

   Ha a lakásban öt szoba lenne, akkor a lakáson kívülre legfeljebb 5 ajtó vezethetne, a lakáson belül pedig legfeljebb $5 \cdot 4/2 = 10$ ajtó lehetne. Így 15 ajtót csak úgy kaphatnánk, ha bármely két szoba között lenne pontosan egy. Ez azonban lehetetlen. Válasszunk ki egy szobát, innen

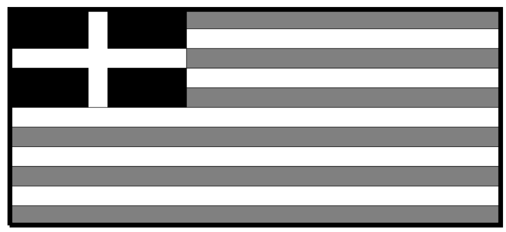
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

négy ajtó nyílna a négy másik szobába. A négy ajtó között van két nem szomszédos, az ezeken át elérhető szobáknak viszont nem lehet közös faluk, így ajtajuk sem.

Hat szoba esetén elérhető a 15 ajtó, például így:



3. Bergengócia zászlaja (lásd az ábrát) 11 egyenlő vastag vízszintes sávot tartalmaz, melyek felváltva szürkék és fehérek, szürkével kezdve. A zászló bal felső sarkában egy öt sáv magas, fekete színű, téglalap alakú mezőben egy fehér kereszt található. A kereszt szárainak vastagsága megegyezik a sávok vastagságával.



Tudjuk, hogy a zászló szürke területeinek összege pontosan az ötszöröse a fekete területek összegének. A zászló 175 cm hosszú és 55 cm széles. Hány cm^2 a zászló fehér területeinek összege?

Megoldás. Legyen egy fekete téglalap hosszúsága x cm, a szélességük két sáv vastagságával, azaz $55 : 11 \cdot 2 = 10$ cm-rel egyezik meg. Ekkor a kereszt melletti sávok hosszúsága (cm-ben) $175 - (2x + 5) = 170 - 2x$.
Így a szürke terület (cm^2-ben): $3 \cdot 5 \cdot (170 - 2x) + 3 \cdot 5 \cdot 175$.
Mivel ez ötszöröse a fekete területnek, így

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5 \cdot (170 - 2x) + 3 \cdot 5 \cdot 175 &= 5 \cdot 4 \cdot 10 \cdot x \\ 2550 - 30x + 2625 &= 200x \\ 5175 &= 230x \\ x &= \frac{5175}{230} = \frac{45}{2}. \end{aligned}$$

Innen a fehér terület:

$$2 \cdot 5 \cdot x + 2 \cdot 5 \cdot 10 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot (170 - 2x) + 3 \cdot 5 \cdot 175 = 4225 \text{ cm}^2.$$

4. Egy pozitív egész számot *váltakozó osztósorozatú*nak nevezünk, ha növekvő sorrendbe írva az összes osztóját, felváltva következnek a páros és páratlan számok. (Például a 42 váltakozó osztósorozatú, hiszen az osztói növekvő sorrendben: $1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42$.)

   (a) Adj meg egy váltakozó osztósorozatú számot, amelynek legalább 12 különböző osztója van.

   (b) Van-e 1-nél nagyobb váltakozó osztósorozatú négyzetszám?

Megoldás

Az (a) részre sokféle példa adható. Például $486 = 2 \cdot 3^5$ megfelelő szám. Ennek osztói nagyság szerinti sorrendben:

$$1 < 2 < 3 < 6 < 9 < 18 < 27 < 54 < 81 < 162 < 243 < 486.$$

A konstrukció lényege, hogy ha $x < 486$ egy páratlan osztó, akkor $x < 2x < 3x$, ahol $2x$ és $3x$ is osztó, és a $2x$ osztón kívül más osztó nem esik x és $3x$ közé.
A $486 = 2 \cdot 3^5$ számhoz hasonlóan, minden $2 \cdot 3^k$ alakú szám (ahol $k \geq 5$), sőt minden $2 \cdot p^k$ alakú szám (ahol $k \geq 5$ és p egy páratlan prímszám) jó példát szolgáltat.

Egy másik jó példa: $1806 = 42 \cdot 43$. Ennek osztói nagyság szerinti sorrendben:

$$1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, 43, 86, 129, 258, 301, 602, 903, 1806.$$

Ezeb példa működésének kulcsa következő észrevétel: ha egy n páros szám váltakozó osztósorozatú, míg p egy n-nél nagyobb prímszám, akkor $p \cdot n$ is váltakozó osztósorozatú lesz. Ilyenkor ugyanis $p \cdot n$ osztóinak növekedő sorozata úgy állítható elő, hogy az n sorozatának végére odaírjuk mégegyszer ugyanezt a sorozatot, csak minden tagot p-szeresére növelve.

A két eddig bemutatott módszer ötvözésével kapható meg a legkisebb váltakozó osztósorozatú szám, amelynek legalább 12 osztója van. Ez a $342 = 2 \cdot 3^2 \cdot 19$, ennek osztói:

$$1, 2, 3, 6, 9, 18, 19, 38, 57, 114, 171, 342.$$

A (b) rész kérdésére a válasz: nincs.

Indirekt bizonyítást alkalmazunk. Tegyük fel, hogy létezik 1-nél nagyobb nagyobb váltakozó osztósorozatú négyzetszám, ezt jelölje n. Világos, hogy n páros szám kell legyen, különben az összes osztója páratlan volna. Innen többféleképpen ellentmondáshoz tudunk jutni:

(1. gondolatmenet) Mivel n páros és négyzetszám, ezért osztható 4-gyel is. n növekedő osztósorozatának a vége így fog kinézni: $\ldots, \frac{n}{2}, n$. Ezek között már nem lehet egyéb osztó, hiszen n-t vele elosztva a hányados 1-nél nagyobb, de 2-nél kisebb lenne, nem lehetne egész. Mivel n osztható 4-gyel így $\frac{n}{2}$ és n egyaránt páros számok, nem teljesül a váltakozás. Ellentmondás.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

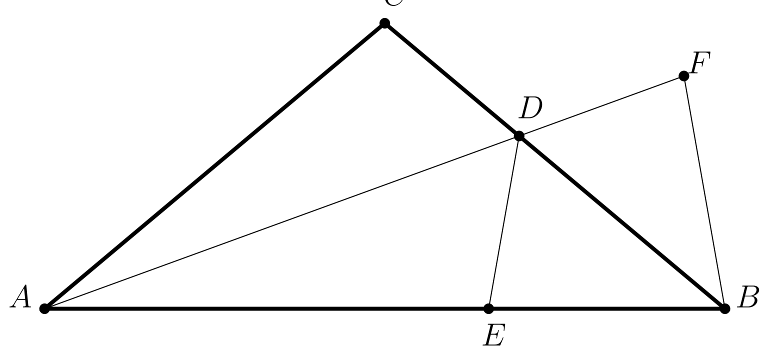
(2. gondolatmenet) Mivel n páros és négyzetszám, ezért osztható 4-gyel is. Ekkor minden p páratlan osztójához p páratlan osztóhoz hozzárendelhetjük a $2p$ és $4p$ osztóit. Így minden páratlan osztóhoz két páros osztót rendeltünk hozzá (különböző páratlan számokhoz különböző párosakat), így legalább kétszer annyi páros osztója van n-nek, mint páratlan. Márpedig az 1-nél nagyobb váltakozó osztósorozatú számoknak nem lehet több páros osztója, mint páratlan, hiszen a növekvő sorozatban felváltva jönnek a páratlan és a páros osztók, és a sorozat első tagja páratlan. Ellentmondás.

(3. gondolatmenet) A négyzetszámoknak páratlan sok osztójuk van. (Ez az állítás közismert, a versenyen elfogadjuk külön bizonyítás nélkül. Megjegyezzük, hogy osztópárokkal a bizonyítás sem nehéz.) Mivel az n legkisebb osztója (az 1) páratlan és váltakozva következnek, ezért a növekvő sorrendben páratlanadik osztók mind páratlanok lesznek. De így a legnagyobb osztó, n maga is páratlan kell legyen. Ellentmondás.

5. Az egyenlő szárú ABC háromszög C-nél lévő szöge 100°. Az A-ból húzott szögfelező a BC oldalt a D pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy $AD + DC = AB$.

1. megoldás. Mivel C-nél tompaszög van, így csak $AC = BC$ lehetséges. Emiatt $CAB\sphericalangle = CBA\sphericalangle = 40°$, így $CAD\sphericalangle = DAB\sphericalangle = 20°$.

Jelölje a C pontnak az AD egyenesre vett tükörképét E. Az AD szögfelező tulajdonsága miatt E az AB egyenesre esik.
Hosszabbítsuk meg D-n túl az AD szakaszt, és a meghosszabbításon vegyük fel az F pontot úgy, hogy $DC = DE = DF$ teljesüljön. Ekkor $AED\sphericalangle = 100°$, $CDE\sphericalangle = 360° - (100° + 20° + 100°) = 120°$, továbbá a tükrözés miatt $CDF\sphericalangle = EDF\sphericalangle$, így ezek a szögek is 120°-osak. Mivel $EDB\sphericalangle = 180° - 120° = 60°$, a BC egyenes felezi az EDF szöget.



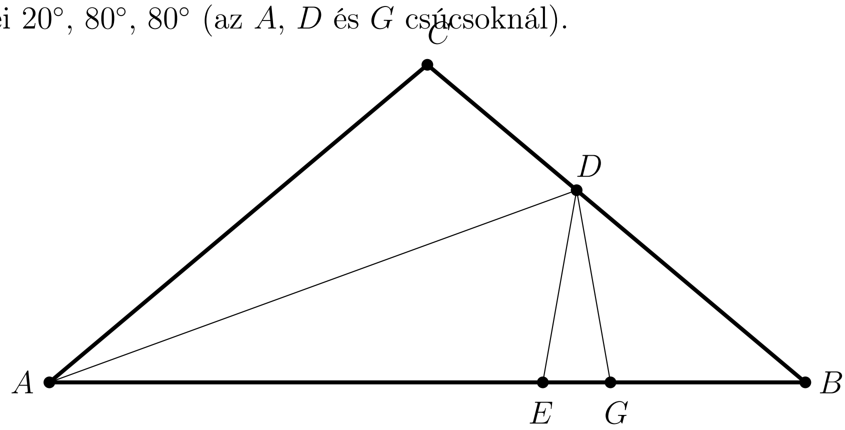
Így $DF = DE$ miatt az F pont BC egyenesre vonatkozó tükörképe E, tehát $DFB\sphericalangle = DEB\sphericalangle = 180° - 100° = 80°$, így viszont $FBA\sphericalangle = 180° - (80° + 20°) = 80°$. Tehát az ABF háromszög egyenlő szárú, így $AB = AF = AD + DF = AD + DC$.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176.
E-mail: titkarsag@titnet.hu; honlap: www.titnet.hu; www.ixam.hu
Telefon: 483-2540, 327-8900; fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

2. megoldás

Az 1. megoldáshoz hasonlóan megállapítjuk az ABC háromszög szögeinek nagyságát.

Vegyük fel az AB oldalon a G pontot úgy, hogy $AD = AG$ teljesüljön. Az ADF egyenlő szárú háromszög szögei 20°, 80°, 80° (az A, D és G csúcsoknál).



Így a BDG háromszög szögeit is ki tudjuk számolni: a G csúcsnál 100°-os a szög, a B csúcsnál 40°-os (az eredeti háromszögből), így a D csúcsnál is 40°-os a szög.

Ezek alapján a BDG háromszög egyenlő szárú, $BG = DG$. Azt kéne tehát még belátni, hogy $DG = DC$. Tükrözzük a C pontot a szögfelezőre, így kapjuk az E pontot az AB szakaszon. Az eddigiekhez hasonló egyszerű szögszámolással meg lehet kapni, hogy a DEG háromszög is egyenlő szárú, így $DE = DG$, a tükrözés miatt pedig $DE = DC$, így készen vagyunk.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Hujter Bálint, Nagy Kartal, Sándor András.
Lektorálta: Erben Péter, Steller Gábor.

Az NTP-TMV-19-0019. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma és a Nemzeti Kulturális Alap támogatja.