Kalmár László (matematikus)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

44. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló - 2015. április 11.

HATODIK OSZTÁLY - Javítási útmutató

1. Melyik a legkisebb 3-mal osztható négyjegyű szám, amelynek minden számjegye különböző, és az első két számjegy összege háromszorosa a harmadik és negyedik számjegy összegének?

Megoldás
Keressük a számot $\overline{abcd}$ alakban (a,b,c,d páronként különböző számjegyek). Mivel $\overline{abcd}$ osztható 3-mal, így a számjegyeinek összege is osztható 3-mal. (***1** pont*)
A feltétel értelmében az első két számjegy összege egyenlő a harmadik és a negyedik számjegy összegének háromszorosával ($a + b = 3(c + d)$).
Ez azt jelenti, hogy a számjegyek összege a harmadik és a negyedik számjegy összegének négyszerese ($a + b + c + d = 4(c + d)$). (***1** pont*)
Ez csak úgy lehet 3-mal osztható, ha a harmadik és a negyedik számjegy összege osztható 3-mal. (***1** pont*)
Ekkor az első két jegy összege, amely a harmadik és a negyedik jegy összegének háromszorosa, oszthatónak kell lennie 9-cel, azaz az összegük legalább 9 (hiszen 0 nem lehet). (***1** pont*)
Mivel ez egy valódi négyjegyű szám, ezért az első jegy legalább 1 ($a \geq 1$). A legkisebb ilyen számra törekszünk, ezért $a = 1$, és így $b = 8$. (***1** pont*)
Mivel $a + b = 9$, így $c + d = 3$. Ismét a minimumra törekvés miatt: $c = 0, d = 3$. (***1** pont*)
A megoldás tehát: **1803**. (***1** pont*)
Összesen: 7 pont

Megjegyzés.
A 9-cel való oszthatóságra nincs szükség. Vegyük észre, hogy az utolsó két számjegy összege nem lehet nulla, mert akkor az első két számjegy összege is nulla lenne, és így nem kapnánk valódi négyjegyű számot. Mivel az utolsó két számjegy összege oszható hárommal, így legalább 3 az összegük. Ekkor viszont az első két számjegy összege legalább 9.

2. Adj meg egy négyszöget és 2 egymásra merőleges egyenest úgy, hogy ha felvágjuk a négyszöget a két egyenes mentén, akkor a lehető legtöbb darabot kapjuk! (Nem kell bizonyítani, hogy ez a maximum.)

FINY: 00516-2008
NMH: E-000226/2014

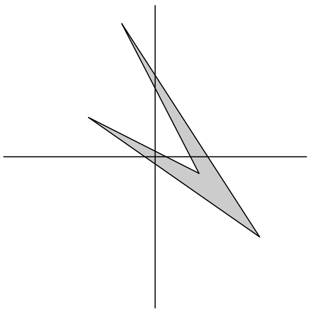
Kalmár László (matematikus)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

Megoldás

Legfeljebb 6 részre lehet osztani a négyszöget. Az alábbi ábra egy lehetséges megoldást mutat. (Nem kell bizonyítani, hogy ennél több rész nem lehetséges.)



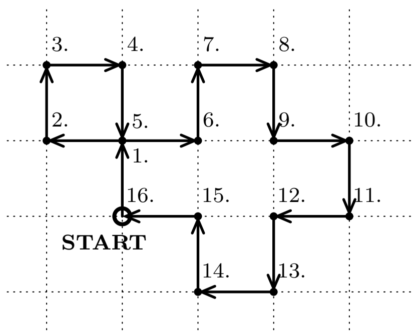
7 pont

Megjegyzés.

Ha sikerül 5 részre osztani egy (konkáv) négyszöget: ***3** pont.*

Ha a két egyenes az ábrán látványosan nem merőleges, akkor a fenti pontszámokból vonjunk le 1-et.

3. Egy katica egy négyzetrács rácsvonalain mozog úgy, hogy az egyik rácspontból indul, minden rácspontban elfordul derékszögben és az útja végén visszaérkezik a kiindulási pontba. Lehetséges-e, hogy az út során éppen 222 egységet haladt? (Az ábrán egy 16 egység hosszúságú útvonal látható.)



1. megoldás

A katica egy-egy lépése 4 irányban történhet: vízszintesen balra vagy jobbra, illetve függőlegesen fel vagy le.

A katica útja végén visszatér a kiindulópontba, ezért összesen ugyanannyi lépést tesz balra, mint amennyit jobbra. Így a vízszintes lépések száma páros szám. (***2** pont*)

Hasonlóan látható a függőleges lépésekről is, hogy ezek száma szintén páros. (***1** pont*)

Mivel a katica minden rácspontban elfordul derékszögben, ezért felváltva tesz egy-egy lépést vízszintesen és függőlegesen. (***1** pont*)

Mindkét típusból páros számú lépést tesz, ezért ugyanannyit lép vízszintes és függőleges irányban. (***1** pont*)

FINY: 00516-2008
NMH: E-000226/2014

Azaz a teljes lépésszám fele csak páros szám lehet. (A teljes lépésszám 4-gyel osztható.) (***1*** *pont*)
Mivel a 222 fele nem páratlan (a 222 nem osztható 4-gyel), így a kívánt útvonal **nem létezik**. (***1*** *pont*)

Összesen: 7 pont

2. megoldás

Tegyük fel, hogy a katica az origóból indul és minden lépése 1 egység hosszúságú. Ekkor minden lépés után egy egész koordinátájú pontban fog tartózkodni.
Mivel egy lépésben egy rácsvonal mentén halad 1 egységet, ezért pontosan az egyik koordináta változik meg, mégpedig éppen 1-gyel. Nőhet is, csökkenhet is. Vagyis minden lépésben pontosan az egyik koordináta paritása változik meg. (***1*** *pont*)
Tegyük fel, hogy visszatér a kiindulás helyére, vagyis az origóba. Ez azt jelenti, hogy mindkét koordinátája páros sokszor kellett, hogy megváltozzon. (***1*** *pont*)
Mivel minden lépés után derékszögben fordul el, ezért a koordináták szigorúan felváltva változnak. (***1*** *pont*)
Kiinduláskor mindkét koordináta páros (0). Az első lépés után az egyik páratlan a másik páros. A második után mindkettő páratlan. A harmadik után az egyik páros a másik páratlan. A negyedik után pedig ismét mindkettő páros. (***1*** *pont*)
Ez ismétlődik ezt követően is, vagyis nyilvánvalóan minden negyedik lépésben lesz mindkét koordináta páros. (***1*** *pont*)
Ebből következik, hogy ha visszatér a kiindulási helyre, akkor az időközben megtett lépések száma 4-gyel osztható. (***1*** *pont*)
Mivel 222 nem osztható 4-gyel, így a kívánt útvonal **nem létezik**. (***1*** *pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés.
Ha közli, hogy minden megfelelő útvonal hossza 4-gyel osztható, de nem bizonyítja: ***2*** *pont.*

4. Egy sakktábla a8 mezőjén áll egy huszár, a b7-h1 átló valamennyi mezőjén pedig egy-egy pénzérme található (lásd a bal oldali ábrát). A huszárral a sakkban szokásos módon léphetünk (lásd a jobb oldali ábrát). Ha rálépünk egy érmére, akkor azt felvehetjük.

   (a) Bizonyítsd be, hogy nem lehetséges 14-nél kevesebb lépéssel begyűjteni a 7 érmét!

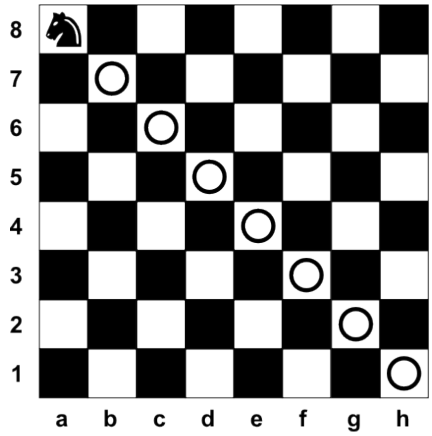
   (b) Adj meg egy 14 huszárlépésből álló útvonalat, amelynek során mindegyik érmét megszerzed! (Leírhatod sorban a mezőket az a8-cal kezdve vagy írd be a 8×8-as négyzet megfelelő mezőjébe, hogy hányadik lépés után tartózkodik ott a huszár.)

FINY: 00516-2008
NMH: E-000226/2014

Kalmár László (matematikus)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901



Megoldás

(a) A huszár fehér mezőről indul és minden lépésben megváltozik a mező színe, amin áll. Vagyis páros lépés után tartózkodik ismét fehér mezőn. (***2** pont*)

Mind a 7 érme fehér mezőn van és egy mezőn csak egy érme, ezért legalább 7-szer fehérre kell lépnie, hogy összegyűjthesse az összes érmét. Összesen tehát legalább 14 lépésre van szükség az érmék összegyűjtéséhez. (***2** pont*)

(b) Létezik ilyen lépéssorzat:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
(a8-)	**c7-**	**d5-**	**f4-**	**g2-**	**h4-**	**f3-**	**e5-**	**c6-**	**d8-**	**b7-**	**d6-**	**e4-**	**g3-**	**h1**
	vagy		vagy		vagy		vagy		vagy		vagy		vagy	
	b6-		**e3-**		**e1-**		**d4-**		**a5-**		**c5-**		**f2-**	

(***3** pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés.

Ha valaki megad egy 16 hosszúságú lépéssorozatot, amivel összegyűjti az összes érmét, vagy pedig egy 14 hosszút, amivel 6 érmét gyűjt össze: ***1** pont.*

A feladat (a) részében elég arra hivatkozni, hogy az átló egyik mezőjéről sem lehet közvetlenül egy másikra lépni a huszárral.

A (b) részben elég egyetlen helyes lépéssorozatot megadni a teljes pontszámért, további megoldásokért nem jár pluszpont.

5. Egy nagy asztalra piros (P) és kék (K) korongokat pakolunk. Az első sorba 5 darabot helyezünk el. Ezt követően az első sor alá két-két korong közé egy-egy újabbat teszünk, mégpedig úgy, hogy két egyforma alá pirosat, két különböző alá kéket rakunk. Majd ugyanezt a szabályt mindig egy-egy sorral lejjebb alkalmazva teszünk korongokat a harmadik, negyedik és végül az ötödik sorba (ide már csak egyetlen korong kerül).

FINY: 00516-2008
NMH: E-000226/2014

Kalmár László (matematikus)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

Igaz-e, hogy ha az első sorban van kék korong, akkor összesen legalább 5 kék korong lesz az asztalon?

1. megoldás

Vizsgáljuk meg a lehetséges eseteket alulról felfelé.

Tegyük fel, hogy az utolsó sorba kék korong kerül. Ez a szabály miatt azt jelenti, hogy a negyedik sorban is van kék korong (mégpedig pontosan 1 kék és 1 piros), ami miatt a harmadik sorban is van kék korong, és ez igaz marad minden kisebb sorszámú sorra is. (***1** pont*)

Mivel 5 sor van, így van legalább 5 kék korong ebben az esetben. (***1** pont*)

Nézzük ezek után azt az esetet, amikor az ötödik sorba piros korong kerül. Ekkor a negyedik sor vagy két kék korongot tartalmaz, vagy két pirosat. Ha két kék van benne, akkor az első eset gondolatmenetét követve kapjuk, hogy van legalább 5 kék korong az asztalon. (***1** pont*)

Ha két piros áll a negyedik sorban, akkor a harmadikban vagy három kék, vagy három piros korong van. Ha három kék, akkor hasonlóan az előzőekhez kapjuk, hogy van legalább 5 kék korong az asztalon. (***1** pont*)

Ha három piros, akkor a felette lévő sorban lehet négy kék vagy négy piros. Az első sorban is van kék, így ha az első esetben van legalább 5 kék korong. (***1** pont*)

Ha pedig a második sorban minden korong piros, akkor az első sorban is minden korong ugyanolyan színű. Nem lehet azonban mindegyik piros, hiszen van közöttük kék. (***1** pont*)

Tehát ekkor mind kék, így ekkor is van 5 kék korong az asztalon. A válasz tehát az, hogy **igen, igaz**. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

2. megoldás

Ha egy sorban van kék korong, akkor az összes felette levőben is van. Ez azért igaz, mert kék korongot akkor helyezünk le, ha felette egy kék és egy piros volt szomszédos. (***1** pont*)

Ha az utolsó sor egyetlen korongja kék, akkor a fentiek miatt mind az 5 sorban van legalább egy-egy. Így van összesen legalább 5 kék korong. (***1** pont*)

Ha a legalsó sorban piros korong van, akkor vegyük az a sort, amelyik a kék korongokat tartalmazó sorok közül a legalacsonyabban van. Mivel alatta csupa piros korong van, így ebben a sorban minden korong egyforma színű, tehát mindegyik kék. (***1** pont*)

Legyen ebben a sorban k darab kék korong. Mivel minden sorban eggyel kevesebb korong van, mint az előzőben, így efelett még $5-k$ darab sor van. (***2** pont*)

Ezek mindegyikében van legalább egy-egy kék korong az első megállapításunk szerint, ez legalább $5-k$ darab. (***1** pont*)

Így összesen legalább $k+(5-k)=5$ darab kék korong, tehát az állítás **igaz**. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

FINY: 00516-2008
NMH: E-000226/2014