



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901



Kalmár László (matematikus)

43. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVESENÝ MEGYEI FORDULÓ

HETEDIK OSZTÁLY JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Alfa tanár úr 5 tanulót vizsgáztatott matematikából. Az elért pontszámokat véletlen sorrendben írta egy papírra, majd minden leírt pontszám után kiszámolta a papíron lévő számok számtani közepét (átlagát). Alfa tanár úr rájött, hogy minden egyes leírt szám után az átlag egy egész szám. A diákok pontszámai növekvő sorrendben a következők voltak: 71, 76, 80, 82 és 91. Milyen sorrendben jegyezhette le a számokat Alfa tanár úr?

Megoldás:

Vizsgáljuk a számok hárommal, négygel való osztásának maradékait!

	71	76	80	82	91
3-mal osztva	2	1	2	1	1
4-gyel osztva	3	0	0	2	3

A feltételek alapján az első két szám vagy mindkettő páros, vagy mindkettő páratlan.

1 pont

Az első három szám összege osztható 3-mal, ezért csak a 76, 82 és a 91 jöhet szóba valamilyen sorrendben.

1 pont

Innen már láthatjuk, hogy az első kettő csak a 76 és a 82 lehetett valamilyen sorrendben. A harmadik pedig a 91.

2 pont

Ez a három szám 4-gyel osztva 1 maradékos, tehát kell még egy 4-gyel osztva 3 maradékos, ez pedig a 71 lesz. A 71 a negyedik szám, az ötödik pedig a 80.

2 pont

A sorrend tehát első kettő a 76 és a 82 lehetett valamilyen sorrendben, a harmadik a 91, a negyedik a 71, az ötödik pedig a 80. Tehát két sorrend is lehetett.

1 pont



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901



Kalmár László (matematikus)

Pontozás: Nehéz elképzelni, hogy a fenti megoldást sok tanuló "eltalálja". Kezeljük a fenti pontozást rugalmasan. Ha megadja a két helyes sorrendet, de okoskodását nem tudja nyelvileg megfogalmazni, akkor is adhatunk 5 pontot. Helyes elindulás, de hibás befejezésnél is adhatunk legfeljebb 2 pontot.

2. Az 1 számlálójú törteket törzstörteknek nevezzük. Figyeld meg a következő törzstörtekre bontást:

$$\frac{19}{20} = \frac{10+5+4}{20} = \frac{10}{20} + \frac{5}{20} + \frac{4}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}. \text{ Tehát: } \frac{19}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}, \text{ s ezek különböző törzstörtek.}$$

Bontsd fel különböző törzstörtek összegére a következő törteket: $\frac{19}{24}$; $\frac{29}{48}$; $\frac{21}{25}$; $\frac{6}{7}$!

Megoldás: A nevezők osztóiból, vagy a nevezők többszörösei osztóiból kell előállítani a számlálót ahhoz, hogy egyszerűsíteni tudjunk.

$$\frac{19}{24} = \frac{12+6+1}{24} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{24} \quad 1 \text{ pont}$$

$$\frac{29}{48} = \frac{12+8+6+3}{48} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \quad 2 \text{ pont}$$

$\frac{21}{25}$ törtnél nem működik az előbbi típusú felbontás, először bővíteni kell a törtet:

$$\frac{21}{25} = \frac{42}{50} = \frac{25+10+5+2}{50} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{25} \quad 2 \text{ pont}$$

$$\frac{6}{7} \text{ -nél 4-gyel kell bővíteni. } \frac{6}{7} = \frac{24}{28} = \frac{14+7+2+1}{28} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28}. \quad 2 \text{ pont}$$

3. Melyek azok a háromjegyű számok, amelyek egyenlők a számjegyeik faktoriálisainak összegével?

($n!$ olvasd n faktoriális! Az n szám faktoriálisának nevezzük az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ szorzatot, tehát szavakkal elmondva $n!$ jelenti az első n pozitív egész szám szorzatát. Pl.: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, de $0! = 1$ és $1! = 1$)



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901



Kalmár László (matematikus)

Megoldás:

Tervszerű próbálgatást fogunk alkalmazni! A számjegyek között nem szerepelhet a 7, 8, 9, mert ezek faktoriálisa nagyobb, mint 1000. Ebből következik, hogy a szám nem nagyobb 666-nál, és így a 6-os sem szerepelhet, mert $6! = 720 > 666$.

Az sem lehetséges, hogy mindegyik jegy kisebb 5-nél, mert ebben az esetben a szám legfeljebb $4! + 4! + 4! = 72$ lehetne, vagyis nem lehetne háromjegyű. A jegyek között tehát szerepel az 5.

1 pont

Ha egyetlen 5-ös szerepel, akkor a szám $5! + 0! + 0! = 122$ és $5! + 4! + 4! = 168$ közé esik, az első jegye tehát az 1. Az $5!$ és $1!$ összege 121. A harmadik jegy 1, 2, 3, 4, aminek a faktoriálisa 1, 2, 6 vagy 24; ezért csak a 122, 123, 127, 145 számokat kell ellenőrizni. Ezek közül csak a 145 megoldás.

3 pont

Ha két 5-ös jegy van, akkor a szám $5! + 5! + 0! = 241$ és $5! + 5! + 4! = 264$ közé esik, az első jegy a 2; ebben az esetben a szám csak $5! + 5! + 2! = 242$ lehetne, de ez nem megoldás, nincs is benne 5-ös számjegy.

2 pont

Végül, a 3 darab 5-ös számjegyből álló 555 sem megoldás, mert $5! + 5! + 5! = 360$ és nem 555.

1 pont

Az egyetlen megoldás tehát a 145.

4. *Hány olyan nem üres részhalmaza van az $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$ halmaznak, amelyben az elemek szorzata 5-re végződik? (Az egyelemű halmazban az elemek szorzata maga az elem.)*

Megoldás:

Egy szorzat pontosan akkor végződik 5-re, ha törzstényező felbontásában csak páratlan számok szerepelnek és az 5 is szerepel benne.

1 pont

Képezzük az öttel nem osztható páratlan számok halmazát: $A = \{1; 3; 7; 9; 11; 13\}$, valamint az öttel osztható páratlan számok halmazát: $B = \{5; 15\}$.



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901



Kalmár László (matematikus)

Ha az A halmazból valahány elemet kivesszünk, s ezeket összeszorozzuk, akkor a kapott szorzat páratlan lesz. Ilyen részhalmaz 64 lesz (2^6), hiszen egy-egy elemet vagy kiválasztunk, vagy nem, tehát minden elemnél két lehetőségünk van. Itt az üres halmazt és az alaphalmazt is választhatjuk.

2 pont

Ehhez kell még szorzó tényezőként hozzávenni a B halmaz valahány elemét: 5, 15 vagy $5 \cdot 15 = 75$. Ezt háromféleképpen választhatjuk, mert ebben az esetben az üres halmazt nem választhatjuk.

2 pont

Tehát, ha azt akarjuk, hogy a törzstényezős felbontásban csak páratlan számok szerepeljenek **és** az 5 is szerepeljen benne, akkor a lehetőségek számát össze kell szoroznunk (szorzási szabály).

Az összes lehetőség $2^6 \cdot 3 = 192$.

2 pont

Megjegyzés: Elképzelhető, hogy lesznek olyan versenyzők, akik megpróbálják konkrétan felsorolni a kérdéses halmazokat, de a fenti törvényszerűségeket nem ismerik fel. A felsorolt halmazok számától függően arányos pontszámot adjunk, legfeljebb 5-öt.

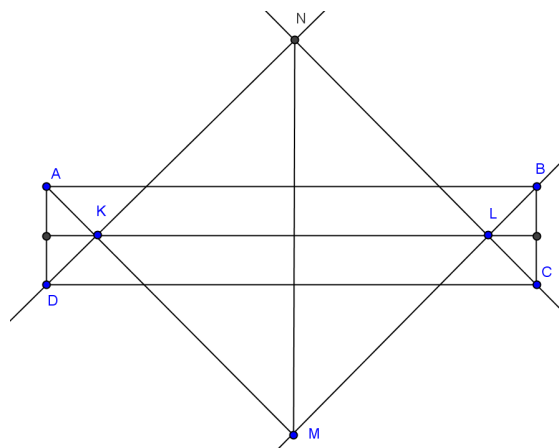
5. Egy téglalap egyik oldala a másik oldal ötszöröse. A téglalap szögfelezői által meghatározott négyszög területe 32 cm^2 . Mekkora a téglalap területe?

Megoldás:

A szöveg csak annyit mond, hogy a szögfelezők által meghatározott síkidom egy négyszög, tehát be kell látnunk, hogy ez egy négyzet.

Állítás: Az $ABCD$ téglalap szögfelezői által meghatározott négyszög egy négyzet.

Bizonyítás: A téglalap szögfelezőinek metszéspontjai legyenek K , L , M és N . A szerkesztésből adódóan a $KMLN$ négyszög





TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901



Kalmár László (matematikus)

tengelyesen tükrös a KL és az MN egyenesekre, amelyek merőlegesek egymásra. Kevés szögszámítással beláthatjuk, hogy mind a négy szöge derékszög. Azt is beláttuk ezzel, hogy $NM = KL$, hiszen a négyzet átlói egyenlők. 3 pont

A négyzet területét kiszámíthatjuk a rombusz területhez hasonlóan az "átló szor átló per 2" képlettel. Tehát $\frac{NM \cdot KL}{2} = 32$, $NM \cdot KL = 64$. 2 pont

Fentebb beláttuk, hogy $NM = KL$, így $NM = KL = 8$, amiből az $ABCD$ téglalap oldalai 10 és 2 cm-esek, tehát a területe 20 cm^2 . 2 pont

Valamennyi feladat hibátlan megoldása 7 pontot ér, így az elérhető maximális pontszám 35.

Budapest, 2014. március 22.